

# Aussagenlogik

Michael Meyling

1. Mai 2011

Die Quelle für dieses Dokument ist hier zu finden:

[http://www.qedeq.org/0\\_04\\_02/doc/math/qedeq\\_propositional\\_v1.xml](http://www.qedeq.org/0_04_02/doc/math/qedeq_propositional_v1.xml)

Die vorliegende Publikation ist urheberrechtlich geschützt.

Bei Fragen, Anregungen oder Bitte um Aufnahme in die Liste der abhängigen Module schicken Sie bitte eine EMail an die Adresse [mime@qedeq.org](mailto:mime@qedeq.org)

Die Autoren dieses Dokuments sind: Michael Meyling [michael@meyling.com](mailto:michael@meyling.com)

# Inhaltsverzeichnis

<b>Zusammenfassung</b>	<b>5</b>
<b>1 Axiome und Schlussregeln</b>	<b>7</b>
1.1 Axiome . . . . .	7
1.2 First Propositions . . . . .	8
<b>Index</b>	<b>9</b>



# Zusammenfassung

In diesem Text wird die Aussagenlogik in axiomatischer Weise entwickelt. Hintergrundinformationen stehen unter [http://en.wikipedia.org/wiki/Propositional\\_calculus](http://en.wikipedia.org/wiki/Propositional_calculus) und <http://www.ltn.lv/~podnieks/mlog/ml1.htm#axioms>.



# Kapitel 1

## Axiome und Schlussregeln

Nun geben wir das Axiomensystem für die Aussagenlogik an und formulieren die Regeln um daraus neue Formeln zu gewinnen.

### 1.1 Axiome

Nun listen wir einfach alle Axiome ohne weitere Erläuterungen auf.

**Axiom 1** (Hypotheseineinführung). [axiom:THEN-1]

$$A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

**Axiom 2** (Verteilung einer Hypothese über Implikation). [axiom:THEN-2]

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

**Axiom 3** (Konjunktionenkürzung rechts). [axiom:AND-1]

$$(A \wedge B) \rightarrow A$$

**Axiom 4** (Konjunktionenkürzung links). [axiom:AND-2]

$$(A \wedge B) \rightarrow B$$

**Axiom 5** (Konjunktionseinführung). [axiom:AND-3]

$$B \rightarrow (A \rightarrow (A \wedge B))$$

**Axiom 6** (Konjunktionseinführung rechts). [axiom:OR-1]

$$A \rightarrow (A \vee B)$$

**Axiom 7** (Konjunktionseinführung links). [axiom:OR-2]

$$A \rightarrow (B \vee A)$$

**Axiom 8** (Konjunktionenkürzung). [axiom:OR-3]

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow ((A \vee C) \rightarrow B))$$

**Axiom 9** (Negationseinführung). [axiom:NOT-1]

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$$

**Axiom 10** (Negationskürzung). [axiom:NOT-2]

$$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$$

**Axiom 11** (Ausgeschlossenes Drittes). [axiom:NOT-3]

$$A \vee \neg A$$

**Axiom 12** (Äquivalenzkürzung rechts). [axiom:IFF-1]

$$(A \leftrightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

**Axiom 13** (Äquivalenzkürzung links). [axiom:IFF-2]

$$(A \leftrightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

**Axiom 14** (Äquivalenzeinführung). [axiom:IFF-3]

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow (A \leftrightarrow B))$$

## 1.2 First Propositions

Hier nehmen wir die ersten Ableitungen vor.

**Proposition 1.** [proposition:implicationReflexive1]

$$A \rightarrow A$$

*Beweis.*

- |   |                                    |
|---|------------------------------------|
| (1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$   | Add Axiom 1                        |
| (2) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$                   | Add Axiom 2                        |
| (3) $A \rightarrow (B \vee A)$  | Add Axiom 7                        |
| (4) $A \rightarrow ((B \vee A) \rightarrow A)$  | SubstPred $B$ by $B \vee A$ in (1) |
| (5) $(A \rightarrow ((B \vee A) \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow (B \vee A)) \rightarrow (A \rightarrow C))$ | SubstPred $B$ by $B \vee A$ in (2) |
| (6) $(A \rightarrow ((B \vee A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (B \vee A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$ | SubstPred $C$ by $A$ in (5)        |
| (7) $(A \rightarrow (B \vee A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$  | MP (6), (4)                        |
| (8) $A \rightarrow A$   | MP (7), (3)                        |

□

**Proposition 2.** [proposition:implication12]

$$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$$

**Proposition 3.** [proposition:implication13]

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$$



**Proposition 4.** [proposition:implication14]

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C)))$$

**Proposition 5.** [proposition:implication15]

$$(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$$

**Proposition 6.** [proposition:implication16]

$$(A \vee B) \rightarrow (B \vee A)$$

**Proposition 7.** [proposition:implication17]

$$A \rightarrow \neg\neg A$$

**Proposition 8.** [proposition:implication18]

$$\neg\neg A \rightarrow A$$

**Proposition 9.** [proposition:implication19]

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$$

**Proposition 10.** [proposition:implication20]

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$$

**Proposition 11.** [proposition:implication21]

$$((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$$

# Index

Äquivalenz

Einführung, 8

Kürzung, 8

Axiome, 7

Disjunktion

Einführung, 7

Kürzung, 7

Hypotheseneinführung, 7

Hypothesenverteilung, 7

Konjunktion

Einführung, 7

Kürzung, 7

Negation

ausgeschlossenes Drittes, 8

Einführung, 8

Kürzung, 8

Zusammenfassung, 5