Predicatenlogik

Michael Meyling

13. Juni 2011

Die Quelle für dieses Dokument ist hier zu finden:

http://www.qedeq.org/0_04_03/doc/math/qedeq_formal_logic_v1.xml

Bei Fragen, Anregungen oder Bitte um Aufnahme in die Liste der abhängigen Module schicken Sie bitte eine EMail an die Adresse mime@qedeq.org

Die Autoren dieses Dokuments sind: Michael Meyling michael@meyling.com

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

In diesem Text wird die Prädikatenlogik in axiomatischer Weise entwickelt. Die folgende Kalkülsprache und ihre Axiome basieren auf den Formulierungen von *D. Hilbert*, *W. Ackermann*[3], *P. S. Novikov*[1], *V. Detlovs* und *K. Podnieks*[2]. Aus den hier angegebenen logischen Axiomen und den elementaren Schlussregeln können weitere Gesetzmäßigkeiten abgeleitet werden. Erst diese neuen Metaregeln führen zu einer komfortablen logischen Argumentation. Hintergrundinformationen stehen unter `http://www.ltn.lv/~podnieks/mlog/ml.htm` und `http://en.wikipedia.org/wiki/Propositional_calculus`.

Kapitel 1

Sprache

Um mathematische Aussagen präzise formulieren zu können, wird in diesem Kapitel eine formale Sprache definiert. Obgleich dieses Dokument mathematischen Inhalt sehr formal beschreibt, reicht es nicht aus um als Definition für ein computerlesbares Dokumentformat zu dienen. Daher muss eine solch extensive Spezifikation an anderer Stelle erfolgen. Das dafür ausgewählte Format ist die *Extensible Markup Language* abgekürzt *XML*. XML beschreibt eine Menge von Regeln für den Aufbau elektronischer Dokumente.[1] Die daran ausgerichtete formale Syntaxspezifikation kann hier gelesen werden: http://www.qedeq.org/current/xml/qedeq.xsd. Damit wird ein mathematisches Dokumentenformat festgelegt, das die Erzeugung von LaTeXBüchern und eine automatische Beweisüberprüfung ermöglicht. Weitere Syntaxbeschränkungen und einige Erklärungen werden beschrieben in http://www.qedeq.org/current/doc/project/qedeq_logic_language_en.pdf.

Auch dieses Dokument ist eine (oder wurde erzeugt aus einer) XML-Datei, die hier zu finden ist http://wwww.qedeq.org/0_04_03/doc/math/qedeq_logic_v1.xml. Aber nun folgen wir einfach dem traditionellen mathematischen Weg, die Anfangsgünde der mathematischen Logik vorzustellen.

1.1 Terme und Formeln

Als Symbole kommen die *logischen Symbole* $L = \{$ '$\neg$', '$\vee$', '$\wedge$', '$\leftrightarrow$', '$\rightarrow$', '$\forall$', '$\exists$' $\}$, die *Prädikatenkonstanten* $C = \{c_i^k \mid i, k \in \omega\}$, die *Funktionsvariablen*[2] $F = \{f_i^k \mid i, k \in \omega \wedge k > 0\}$, die *Funktionskonstanten*[3] $H = \{h_i^k \mid i, k \in \omega\}$, die *Subjektvariablen* $V = \{v_i \mid i \in \omega\}$, sowie die *Prädikatenvariablen* $P = \{p_i^k \mid i, k \in \omega\}$ vor.[4] Unter der *Stellenzahl* eines Operators wird der obere Index verstanden. Die Menge der nullstelligen Prädikatenvariablen wird auch als Menge der *Aussagenvariablen* bezeichnet: $A := \{p_i^0 \mid i \in \omega\}$. Für die Subjektvariablen werden abkürzend auch bestimmte Kleinbuchstaben geschrieben. Die Kleinbuchstaben stehen für verschiedene Subjektvariablen: $v_1 =$ 'u', $v_2 =$ 'v',

[1]Siehe http://www.w3.org/XML/ für weitere Informationen.

[2]Funktionsvariablen dienen der einfacheren Notation und werden beispielsweise zur Formulierung eines identitätslogischen Satzes benötigt: $x = y \rightarrow f(x) = f(y)$. Ausserdem bereitet ihre Einführung die spätere Syntaxerweiterung zur Anwendung von funktionalen Klassen vor.

[3]Funktionskonstanten dienen ebenfalls der Bequemlichkeit und werden später für direkt definierte Klassenfunktionen verwendet. So zum Beispiel zur Potenzklassenbildung, zur Vereinigungsklassenbildung und für die Nachfolgerfunktion. All diese Funktionskonstanten können auch als Abkürzungen verstanden werden.

[4]Unter ω werden die natürlichen Zahlen, die Null eingeschlossen, verstanden. Alle bei den Mengenbildungen beteiligten Symbole werden als paarweise verschieden vorausgesetzt. Das bedeutet z. B.: $f_i^k = f_{i'}^{k'} \rightarrow (k = k' \wedge i = i')$ und $h_i^k \neq v_j$.

$v_3 =$ 'w', $v_4 =$ 'x', $v_5 =$ 'y', $v_5 =$ 'z'. Weiter werden als Abkürzungen verwendet: für die Prädikatenvariablen $p_1^n =$ 'ϕ' und $p_2^n =$ 'ψ', wobei die jeweilige Stellenanzahl n aus der Anzahl der nachfolgenden Parameter ermittelt wird, für die Aussagenvariablen $a_1 =$ 'A', $a_2 =$ 'B' und $a_3 =$ 'C'. Als Abkürzungen für Funktionsvariablen wird festgelegt $f_1^n =$ 'f' und $f_2^n =$ 'g', wobei wiederum die jeweilige Stellenanzahl n aus der Anzahl der nachfolgenden Parameter ermittelt wird. Bei allen aussagenlogischen zweistelligen Operatoren wird der leichteren Lesbarkeit wegen die Infixschreibweise benutzt, dabei werden die Symbole '(' und ')' verwandt. D. h. für den Operator $\land$ mit den Argumenten A und B wird $(A \land B)$ geschrieben. Es gelten die üblichen Operatorprioritäten und die dazugehörigen Klammerregeln. Insbesondere die äußeren Klammern werden in der Regel weggelassen. Auch werden leere Klammern nicht geschrieben.

Nachfolgend werden die Operatoren mit absteigender Priorität aufgelistet.

$$\begin{array}{c} \neg, \forall, \exists \\ \land \\ \lor \\ \rightarrow, \leftrightarrow \end{array}$$

Der Begriff *Term* wird im Folgenden rekursiv definiert:

1. Jede Subjektvariable ist ein Term.

2. Seien $i, k \in \omega$ und $t_1, \ldots, t_k$ Terme. Dann ist auch $h_i^k(t_1, \ldots, t_k)$ und falls $k > 0$, so auch $f_i^k(t_1, \ldots, t_k)$ ein Term.

Alle nullstelligen Funktionskonstanten $\{h_i^0 \mid i, \in \omega\}$ sind demzufolge Terme, sie werden auch *Individuenkonstanten* genannt.[5]

Die Begriffe *Formel*, *freie* und *gebundene* Subjektvariable werden rekursiv wie folgt definiert:

1. Jede Aussagenvariable ist eine Formel, solche Formeln enthalten keine freien oder gebundenen Subjektvariablen.

2. Ist p^k eine k-stellige Prädikatenvariable und c^k eine k-stellige Prädikatenkonstante und sind $t_1, t_2, \ldots, t_k$ Terme, so sind $p^k(t_1, t_2, \ldots t_k)$ und $c^k(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ Formeln. Dabei gelten alle in $t_1, t_2, \ldots, t_k$ vorkommenden Subjektvariablen als freie Subjektvariablen, gebundene Subjektvariablen kommen nicht vor.[6]

3. Es seien α, β Formeln, in denen keine Subjektvariablen vorkommen, die in einer Formel gebunden und in der anderen frei sind. Dann sind auch $\neg\alpha$, $(\alpha \land \beta)$, $(\alpha \lor \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ Formeln. Subjektvariablen, welche in α oder β frei (bzw. gebunden) vorkommen, bleiben frei (bzw. gebunden).

4. Falls in der Formel α die Subjektvariable x_1 nicht gebunden vorkommt[7], dann sind auch $\forall x_1\ \alpha$ und $\exists x_1\ \alpha$ Formeln. Dabei wird $\forall$ als *Allquantor* und $\exists$ als *Existenzquantor* bezeichnet. Bis auf x_1 bleiben alle freien Subjektvariablen von α auch frei, und zu den gebundenen Subjektvariablen von α kommt x_1 hinzu.

[5] Analog dazu könnten Subjektvariablen auch als nullstellige Funktionsvariablen definiert werden. Da die Subjektvariablen jedoch eine hervorgehobene Rolle spielen, werden sie auch gesondert bezeichnet.

[6] Dieser zweite Punkt umfasst den ersten, welcher nur der Anschaulichkeit wegen extra aufgeführt ist.

[7] D. h. x_1 kommt höchstens frei vor.

Alle Formeln die nur durch Anwendung von 1. und 3. gebildet werden, heißen Formeln der *Aussagenalgebra*.

Es gilt für jede Formel α: die Menge der freien und der gebundenen Subjektvariablen von α sind disjunkt.[8]

Falls eine Formel die Gestalt $\forall x_1\ \alpha$ bzw. $\exists x_1\ \alpha$ besitzt, dann heißt die Formel α der *Wirkungsbereich* des Quantors $\forall$ bzw. $\exists$.

Alle Formeln, die beim Aufbau einer Formel mittels 1. bis 4. benötigt werden, heißen *Teilformeln*.

[8] Andere Formalisierungen erlauben z. B. $\forall x_1\ \alpha$ auch dann, wenn x_1 schon in α gebunden vorkommt. Auch Ausdrücke wie $\alpha(x_1) \wedge (\forall\ x_1\ \beta)$ sind erlaubt. Es wird dann für ein einzelnes Vorkommen einer Variablen definiert, ob es sich um ein freies oder gebundenes Vorkommen handelt.

Kapitel 2

Axiome und Schlussregeln

Nun geben wir das Axiomensystem für die Aussagenlogik an und formulieren die Regeln um daraus neue Formeln zu gewinnen.

2.1 Axiome

Nun listen wir einfach alle Axiome ohne weitere Erläuterungen auf.

Axiom 1 (Hypotheseneinführung). [axiom:THEN-1]

$$A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

Axiom 2 (Verteilung einer Hypothese über Implikation). [axiom:THEN-2]

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

Axiom 3 (Konjunktionskürzung rechts). [axiom:AND-1]

$$(A \land B) \rightarrow A$$

Axiom 4 (Konjunktionskürzung links). [axiom:AND-2]

$$(A \land B) \rightarrow B$$

Axiom 5 (Konjunktionseinführung). [axiom:AND-3]

$$B \rightarrow (A \rightarrow (A \land B))$$

Axiom 6 (Konjunktionseinführung rechts). [axiom:OR-1]

$$A \rightarrow (A \lor B)$$

Axiom 7 (Konjunktionseinführung links). [axiom:OR-2]

$$A \rightarrow (B \lor A)$$

Axiom 8 (Konjunktionskürzung). [axiom:OR-3]

$$(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \lor B) \rightarrow C))$$

Axiom 9 (Negationseinführung). [axiom:NOT-1]

$$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$$

Axiom 10 (Negationskürzung). [axiom:NOT-2]

$$\neg A \to (A \to B)$$

Axiom 11 (Ausgeschlossenes Drittes). [axiom:NOT-3]

$$A \lor \neg A$$

Axiom 12 (Äquivalenzkürzung rechts). [axiom:IFF-1]

$$(A \leftrightarrow B) \to (A \to B)$$

Axiom 13 (Äquivalenzkürzung links). [axiom:IFF-2]

$$(A \leftrightarrow B) \to (B \to A)$$

Axiom 14 (Äquivalenzeinführung). [axiom:IFF-3]

$$(A \to B) \to ((B \to A) \to (A \leftrightarrow B))$$

Wenn ein Prädikat auf alle x zutrifft, so trifft es auch auf ein beliebiges y zu.

Axiom 15 (Spezialisierung). [axiom:universalInstantiation]

$$\forall x\ \phi(x) \to \phi(y)$$

Wenn ein Prädikat auf irgend ein y zutrifft, so gibt es ein x, auf das es zutrifft.

Axiom 16 (Existenz). [axiom:existencialGeneralization]

$$\phi(y) \to \exists x\ \phi(x)$$

2.2 Ableitungsregeln

Die im folgenden angegebenen Regeln ermöglichen uns aus den wahr angesehenen Axiomen neue wahre Formeln zu gewinnen. Aus diesen können wiederum weitere Formeln abgeleitet werden, so dass sich die Menge der wahren Formeln sukzessive erweitern lässt.

Regel 1 (Abtrennung, Modus Ponens). [rule:modusPonens] *Wenn α und $\alpha \to \beta$ wahre Formeln sind, dann ist auch β eine wahre Formel.*

Regel 2 (Ersetzung für freie Subjektvariable). [rule:replaceFree] *Ausgehend von einer wahren Formel kann jede freie Subjektvariable durch einen Term ersetzt werden, der keine in der Formel bereits gebundenen Subjektvariablen enthält. Die Ersetzung muss durchgängig in der gesamten Formel erfolgen.*

Das Verbot in dem Term Subjektvariablen zu verwenden, welche in der Originalformel gebunden vorkommen, dient nicht nur der Absicherung der Wohlgeformtheit, sondern besitzt auch eine inhaltliche Bedeutung. Dazu betrachten wir die folgende Ableitung.

$\forall x\ \exists y\ \phi(x,y)$	$\to$	$\exists y\ \phi(z,y)$	mit Axiom 15
$\forall x\ \exists y\ \phi(x,y)$	$\to$	$\exists y\ \phi(y,y)$	verbotene Ersetzung: z durch y, obwohl y bereits gebunden
$\forall x\ \exists y\ x \neq y$	$\to$	$\exists y\ \neq y$	Einsetzung von $\neq$ für ϕ

Diese letzte Aussage ist in vielen Modellen nicht gültig.

Regel 3 (Umbenennung für gebundene Subjektvariable). [rule:renameBound] *Jede gebundene Subjektvariable kann in eine andere, nicht bereits frei vorkommende, Subjektvariable umbenannt werden. Falls über umzubenennende Variable mehrfach quantifiziert wird, dann braucht die Umbenennung nur im Wirkungsbereich eines bestimmten Quantors zu erfolgen.*

Regel 4 (Einsetzung für Prädikatenvariable). [rule:replacePred] *Es sei α eine wahre Formel, die die n-stellige Prädikatenvariable p enthält, $x_1, \ldots, x_n$ seien paarweise verschiedene Subjektvariable und $\beta(x_1, \ldots, x_n)$ eine beliebige Formel in der die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ nicht gebunden sind. In der Formel $\beta(x_1, \ldots, x_n)$ müssen jedoch nicht alle $x_1, \ldots, x_n$ als freie Subjektvariable vorkommen. Weiterhin können auch noch weitere Variable frei oder gebunden vorkommen.*

Wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind, dann kann durch die Ersetzung jedes Vorkommens von $p(t_1, \ldots, t_n)$ mit jeweils passenden Termen $t_1, \ldots, t_n$ in α durch $\beta(t_1, \ldots, t_n)$ eine weitere wahre Formel gewonnen werden.

- *die freien Variablen von $\beta(x_1, \ldots, x_n)$ ohne $x_1, \ldots, x_n$ kommen nicht in α als gebundene Variablen vor*
- *jedes Vorkommen von $p(t_1, \ldots, t_n)$ in α enthält keine gebundene Variable von $\beta(x_1, \ldots, x_n)$*
- *das Ergebnis der Substitution ist eine wohlgeformte Formel*

Siehe III §5 in [3].

Das Verbot in der Ersetzungsformel keine zusätzliche Subjektvariable zu verwenden, welche in der Originalformel gebunden vorkommt, hat nicht nur die Absicherung der Wohlgeformtheit zum Zweck. Es bewahrt auch die inhaltliche Gültigkeit. Dazu betrachten wir die folgende Ableitung.

$$
\begin{array}{rcll}
\phi(x) & \to & \exists y\ \phi(y) & \text{mit Axiom 16} \\
(\exists y\ y = y) \wedge \phi(x) & \to & \exists y\ \phi(y) & \\
\exists y\ (y = y \wedge \phi(x)) & \to & \exists y\ \phi(y) & \\
\exists y\ (y = y \wedge x \neq y) & \to & \exists y\ y \neq y & \text{verbotene Ersetzung: } \phi(x) \text{ durch } x \neq y\text{, obwohl } y \text{ bereits gebunden} \\
\exists y\ x \neq y & \to & \exists y\ y \neq y &
\end{array}
$$

Diese letzte Aussage ist in vielen Modellen nicht gültig.

Analog zu Regel Regel 4 können wir auch Funktionsvariablen ersetzen.

Regel 5 (Einsetzung für Funktionsvariable). [rule:replaceFunct] *Es sei α eine bereits bewiesene Formel, die die n-stellige Funktionsvariable σ enthält, $x_1, \ldots, x_n$ seien paarweise verschiedene Subjektvariable und $\tau(x_1, \ldots, x_n)$ ein beliebiger Term in dem die Subjektvariablen $x_1, \ldots, x_n$ nicht gebunden sind. In dem Term $\tau(x_1, \ldots, x_n)$ müssen nicht alle $x_1, \ldots, x_n$ als freie Subjektvariable vorkommen. Weiterhin können auch noch noch weitere Variable frei oder gebunden vorkommen.*

Wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind, dann kann durch die Ersetzung jedes Vorkommens von $\sigma(t_1, \ldots, t_n)$ mit jeweils passenden Termen $t_1, \ldots, t_n$ in α durch $\tau(t_1, \ldots, t_n)$ eine weitere wahre Formel gewonnen werden.

- *die freien Variablen von $\tau(x_1, \ldots, x_n)$ ohne $x_1, \ldots, x_n$ kommen in α nicht als gebundene Variablen vor*
- *jedes Vorkommen von $\sigma(t_1, \ldots, t_n)$ in α enthält keine gebundene Variable von $\tau(x_1, \ldots, x_n)$*
- *das Ergebnis der Substitution ist eine wohlgeformte Formel*

Regel 6 (Hintere Generalisierung). [rule:universalGeneralization] *Wenn $\alpha \to \beta(x_1)$ eine wahre Formel ist und α die Subjektvariable x_1 nicht enthält, dann ist auch $\alpha \to (\forall x_1\ (\beta(x_1)))$ eine wahre Formel.*

Regel 7 (Vordere Partikularisierung). [rule:existentialGeneralization] *Wenn $\alpha(x_1) \to \beta$ eine wahre Formel ist und β die Subjektvariable x_1 nicht enthält, dann ist auch $(\exists x_1\ \alpha(x_1)) \to \beta$ eine wahre Formel.*

2.3 First Propositions

Hier nehmen wir die ersten Ableitungen vor.

Proposition 1. [proposition:implicationReflexive1]

$$A \to A$$

Beweis.

(1)	$A \to (B \to A)$	Add Axiom 1
(2)	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	Add Axiom 2
(3)	$A \to (B \lor A)$	Add Axiom 7
(4)	$A \to ((B \lor A) \to A)$	SubstPred B by $B \lor A$ in (1)
(5)	$(A \to ((B \lor A) \to C)) \to ((A \to (B \lor A)) \to (A \to C))$	SubstPred B by $B \lor A$ in (2)
(6)	$(A \to ((B \lor A) \to A)) \to ((A \to (B \lor A)) \to (A \to A))$	SubstPred C by A in (5)
(7)	$(A \to (B \lor A)) \to (A \to A)$	MP (6), (4)
(8)	$A \to A$	MP (7), (3)

□

Proposition 2. [proposition:implication19]

$$(A \lor B) \to (B \lor A)$$

Beweis.

(1)	$A \to (A \lor B)$	Add Axiom 6
(2)	$A \to (B \lor A)$	Add Axiom 7
(3)	$(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \lor B) \to C))$	Add Axiom 8
(4)	$D \to (D \lor B)$	SubstPred A by D in (1)
(5)	$(A \to (C \lor A)) \to ((B \to (C \lor A)) \to ((A \lor B) \to (C \lor A)))$	SubstPred C by $C \lor A$ in (3)
(6)	$D \to (D \lor A)$	SubstPred B by A in (4)
(7)	$(A \to (B \lor A)) \to ((B \to (B \lor A)) \to ((A \lor B) \to (B \lor A)))$	SubstPred C by B in (5)
(8)	$(B \to (B \lor A)) \to ((A \lor B) \to (B \lor A))$	MP (7), (2)
(9)	$B \to (B \lor A)$	SubstPred D by B in (6)
(10)	$(A \lor B) \to (B \lor A)$	MP (8), (9)

□

Proposition 3. [proposition:implication23]

$$\neg(A \land \neg A)$$

Beweis.

(1)	$(A \land B) \to A$	Add Axiom 3
(2)	$(A \land B) \to B$	Add Axiom 4
(3)	$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$	Add Axiom 9
(4)	$(A \land \neg A) \to A$	SubstPred B by $\neg A$ in (1)
(5)	$(A \land \neg A) \to \neg A$	SubstPred B by $\neg A$ in (2)
(6)	$((A \land \neg A) \to B) \to (((A \land \neg A) \to \neg B) \to \neg(A \land \neg A))$	SubstPred A by $A \land \neg A$ in (3)
(7)	$((A \land \neg A) \to A) \to (((A \land \neg A) \to \neg A) \to \neg(A \land \neg A))$	SubstPred B by A in (6)
(8)	$((A \land \neg A) \to \neg A) \to \neg(A \land \neg A)$	MP (7), (4)
(9)	$\neg(A \land \neg A)$	MP (8), (5)

□

2.4 Deduktionstheorem

Wir leiten das Deduktionstheorem her. Dies ermöglicht die neue Regel *Conditional Proof.*

Wenn wir B beweisen können, indem wir A als Hypothese annehmen, dann haben wir $A \to B$ bewiesen. Diese Argumentation wir durch das sogenannte *Deduktionstheorem* gerechtfertigt. Das Deduktionstheorem gilt für alle üblichen Ableitungssysteme der Prädikatenlogik der ersten Stufe. Leider macht unsere Verwendung von Prädikatsvariablen und Ersetzungsregeln hier Schwierigkeiten. Wir müssen die Verwendung von Ableitungsregeln einschränken um ein entsprechendes Resultat zu erhalten.

Regel 8. [rule:CP] *Wir haben die wohlgeformte Formel α und fügen sie als neue Beweiszeile hinzu. Nun modifizieren wir die existierenden Ableitungsregeln. Wir können eine weitere Beweiszeile anfügen, wenn $\alpha \to \beta$ eine wohlgeformte Formel ist und die Verwendung einer vorherigen Regel mit den folgenden Einschränkungen die Hinzufügung rechtfertigt: für Regel 2 kommt die ersetzte freie Variable nicht in α vor, für Regel 4 kommt die ersetzte Prädikatenvariable nicht in α vor, für Regel 5 kommt ide ersetzte Funktionsvariable nicht in α vor.*

Beweis. MISSING! OTHER: □

Basierend auf: 1 2

Beweis. MISSING! OTHER: □

2.5 Weitere Sätze

Mittels Deduktionstheorem leiten wir weitere Sätze ab.

Proposition 4. [proposition:implication10]

$$(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$$

Beweis.

Conditional Proof

(1)	$A \to (A \to B)$	Hypothesis

	Conditional Proof	
(2)	$\quad\quad A$	Hypothesis
(3)	$\quad\quad A \rightarrow B$	MP (1), (2)
(4)	$\quad\quad B$	MP (3), (2)
(5)	$\quad A \rightarrow B$	Conclusion
(6)	$(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$	Conclusion

□

Proposition 5. [proposition:implication11]

$$((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$$

Beweis.

(1)	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$	Add Axiom 1
(2)	$D \rightarrow (B \rightarrow D)$	SubstPred A by D in (1)
(3)	$D \rightarrow (A \rightarrow D)$	SubstPred B by A in (2)
(4)	$B \rightarrow (A \rightarrow B)$	SubstPred D by B in (3)
	Conditional Proof	
(5)	$\quad (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$	Hypothesis
	$\quad$ Conditional Proof	
(6)	$\quad\quad A$	Hypothesis
	$\quad\quad$ Conditional Proof	
(7)	$\quad\quad\quad B$	Hypothesis
(8)	$\quad\quad\quad A \rightarrow B$	MP (4), (7)
(9)	$\quad\quad\quad A \rightarrow C$	MP (5), (8)
(10)	$\quad\quad\quad C$	MP (9), (6)
(11)	$\quad\quad B \rightarrow C$	Conclusion
(12)	$\quad A \rightarrow (B \rightarrow C)$	Conclusion
(13)	$((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$	Conclusion

□

Proposition 6. [proposition:implication12]

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

Beweis.

	Conditional Proof	
(1)	$\quad A \rightarrow B$	Hypothesis
	$\quad$ Conditional Proof	
(2)	$\quad\quad B \rightarrow C$	Hypothesis
	$\quad\quad$ Conditional Proof	
(3)	$\quad\quad\quad A$	Hypothesis
(4)	$\quad\quad\quad B$	MP (1), (3)
(5)	$\quad\quad\quad C$	MP (2), (4)
(6)	$\quad\quad A \rightarrow C$	Conclusion
(7)	$\quad (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$	Conclusion
(8)	$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$	Conclusion

□

Proposition 7. [proposition:implication13]

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$$

Beweis.

	Conditional Proof	
(1)	$\quad A \rightarrow (B \rightarrow C)$	Hypothesis
	$\quad$ Conditional Proof	
(2)	$\quad\quad B$	Hypothesis
	$\quad\quad$ Conditional Proof	
(3)	$\quad\quad\quad A$	Hypothesis
(4)	$\quad\quad\quad B \rightarrow C$	MP (1), (3)
(5)	$\quad\quad\quad C$	MP (4), (2)
(6)	$\quad\quad A \rightarrow C$	Conclusion
(7)	$\quad B \rightarrow (A \rightarrow C)$	Conclusion
(8)	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$	Conclusion

□

Proposition 8. [proposition:implication15]

$$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$$

Beweis.

(1)	$(A \wedge B) \rightarrow A$	Add Axiom 3
(2)	$(A \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow A$	SubstPred B by $B \rightarrow C$ in (1)
(3)	$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow B)$	SubstPred A by $A \rightarrow B$ in (2)
(4)	$(A \wedge B) \rightarrow B$	Add Axiom 4
(5)	$(A \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow C)$	SubstPred B by $B \rightarrow C$ in (4)
(6)	$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow C)$	SubstPred A by $A \rightarrow B$ in (5)
	Conditional Proof	
(7)	$\quad (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)$	Hypothesis
(8)	$\quad A \rightarrow B$	MP (3), (7)
(9)	$\quad B \rightarrow C$	MP (6), (7)
(10)	$\quad (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$	Add Proposition 6
(11)	$\quad (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$	MP (10), (8)
(12)	$\quad A \rightarrow C$	MP (11), (9)
(13)	$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$	Conclusion

□

Proposition 9. [proposition:implication17]

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C)))$$

Beweis.

(1)	$B \rightarrow (A \rightarrow (A \wedge B))$	Add Axiom 5
(2)	$C \rightarrow (A \rightarrow (A \wedge C))$	SubstPred B by C in (1)
(3)	$C \rightarrow (B \rightarrow (B \wedge C))$	SubstPred A by B in (2)
	Conditional Proof	
(4)	$\quad A \rightarrow B$	Hypothesis
	$\quad$ Conditional Proof	
(5)	$\quad\quad A \rightarrow C$	Hypothesis
	$\quad\quad$ Conditional Proof	
(6)	$\quad\quad\quad A$	Hypothesis
(7)	$\quad\quad\quad C$	MP (5), (6)
(8)	$\quad\quad\quad B \rightarrow (B \wedge C)$	MP (3), (7)

(9)	B	MP (4), (6)
(10)	$B \wedge C$	MP (8), (9)
(11)	$A \rightarrow (B \wedge C)$	Conclusion
(12)	$(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C))$	Conclusion
(13)	$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C)))$	Conclusion

□

Proposition 10. [proposition:implication18]

$$(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$$

Beweis.

(1)	$B \rightarrow (A \rightarrow (A \wedge B))$	Add Axiom 5
(2)	$C \rightarrow (A \rightarrow (A \wedge C))$	SubstPred B by C in (1)
(3)	$C \rightarrow (B \rightarrow (B \wedge C))$	SubstPred A by B in (2)
(4)	$A \rightarrow (B \rightarrow (B \wedge A))$	SubstPred C by A in (3)
(5)	$(A \wedge B) \rightarrow A$	Add Axiom 3
(6)	$(A \wedge B) \rightarrow B$	Add Axiom 4
	Conditional Proof	
(7)	$A \wedge B$	Hypothesis
(8)	A	MP (5), (7)
(9)	$B \rightarrow (B \wedge A)$	MP (4), (8)
(10)	B	MP (6), (7)
(11)	$B \wedge A$	MP (9), (10)
(12)	$(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$	Conclusion

□

Proposition 11. [proposition:implication20]

$$A \rightarrow \neg\neg A$$

Beweis.

(1)	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$	Add Axiom 1
(2)	$A \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$	SubstPred B by $\neg A$ in (1)
(3)	$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$	Add Axiom 9
(4)	$(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg\neg A)$	SubstPred A by $\neg A$ in (3)
(5)	$(\neg A \rightarrow A) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg\neg A)$	SubstPred B by A in (4)
(6)	$A \rightarrow A$	Add Proposition 1
(7)	$\neg A \rightarrow \neg A$	SubstPred A by $\neg A$ in (6)
	Conditional Proof	
(8)	A	Hypothesis
(9)	$\neg A \rightarrow A$	MP (2), (8)
(10)	$(\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg\neg A$	MP (5), (9)
(11)	$\neg\neg A$	MP (10), (7)
(12)	$A \rightarrow \neg\neg A$	Conclusion

□

Proposition 12. [proposition:implication21]

$$(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$$

Beweis.

(1)	$A \to (B \to A)$	Add Axiom 1
(2)	$C \to (B \to C)$	SubstPred A by C in (1)
(3)	$C \to (A \to C)$	SubstPred B by A in (2)
(4)	$B \to (A \to B)$	SubstPred C by B in (3)
(5)	$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$	Add Axiom 9
	Conditional Proof	
(6)	$\quad A \to \neg B$	Hypothesis
	$\quad$ Conditional Proof	
(7)	$\quad\quad B$	Hypothesis
(8)	$\quad\quad A \to B$	MP (4), (7)
(9)	$\quad\quad (A \to \neg B) \to \neg A$	MP (5), (8)
(10)	$\quad\quad \neg A$	MP (9), (6)
(11)	$\quad B \to \neg A$	Conclusion
(12)	$(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$	Conclusion

□

Proposition 13. [proposition:implication22]

$$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$$

Beweis.

(1)	$A \to (B \to A)$	Add Axiom 1
(2)	$C \to (B \to C)$	SubstPred A by C in (1)
(3)	$C \to (A \to C)$	SubstPred B by A in (2)
(4)	$\neg B \to (A \to \neg B)$	SubstPred C by $\neg B$ in (3)
(5)	$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$	Add Axiom 9
	Conditional Proof	
(6)	$\quad A \to B$	Hypothesis
(7)	$\quad (A \to \neg B) \to \neg A$	MP (5), (6)
	$\quad$ Conditional Proof	
(8)	$\quad\quad \neg B$	Hypothesis
(9)	$\quad\quad A \to \neg B$	MP (4), (8)
(10)	$\quad\quad \neg A$	MP (7), (9)
(11)	$\quad \neg B \to \neg A$	Conclusion
(12)	$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$	Conclusion

□

Proposition 14. [proposition:implication31]

$$\neg\neg\neg A \to \neg A$$

Beweis.

(1)	$A \to \neg\neg A$	Add Proposition 11
(2)	$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$	Add Proposition 13
(3)	$(A \to \neg\neg A) \to (\neg\neg\neg A \to \neg A)$	SubstPred B by $\neg\neg A$ in (2)
(4)	$\neg\neg\neg A \to \neg A$	MP (3), (1)

□

Proposition 15. [proposition:implication33]

$$(\neg A \rightarrow A) \rightarrow \neg\neg A$$

Beweis.

(1)	$A \rightarrow A$	Add Proposition 1
(2)	$\neg A \rightarrow \neg A$	SubstPred A by $\neg A$ in (1)
(3)	$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$	Add Axiom 9
(4)	$(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg\neg A)$	SubstPred A by $\neg A$ in (3)
(5)	$(\neg A \rightarrow A) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg\neg A)$	SubstPred B by A in (4)
	Conditional Proof	
(6)	$\quad \neg A \rightarrow A$	Hypothesis
(7)	$\quad (\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg\neg A$	MP (5), (6)
(8)	$\quad \neg\neg A$	MP (7), (2)
(9)	$(\neg A \rightarrow A) \rightarrow \neg\neg A$	Conclusion

□

Proposition 16. [proposition:implication35]

$$\neg\neg A \rightarrow A$$

Beweis.

(1)	$A \vee \neg A$	Add Axiom 11
(2)	$(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$	Add Axiom 8
(3)	$(A \rightarrow A) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow A))$	SubstPred C by A in (2)
(4)	$A \rightarrow A$	Add Proposition 1
(5)	$(B \rightarrow A) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow A)$	MP (3), (4)
(6)	$(\neg A \rightarrow A) \rightarrow ((A \vee \neg A) \rightarrow A)$	SubstPred B by $\neg A$ in (5)
(7)	$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$	Add Axiom 10
(8)	$\neg\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$	SubstPred A by $\neg A$ in (7)
(9)	$\neg\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$	SubstPred B by A in (8)
	Conditional Proof	
(10)	$\quad \neg\neg A$	Hypothesis
(11)	$\quad \neg A \rightarrow A$	MP (9), (10)
(12)	$\quad (A \vee \neg A) \rightarrow A$	MP (6), (11)
(13)	$\quad A$	MP (12), (1)
(14)	$\neg\neg A \rightarrow A$	Conclusion

□

Proposition 17. [proposition:implication43]

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$$

Beweis.

	Conditional Proof	
(1)	$\quad A \rightarrow (B \rightarrow C)$	Hypothesis
	$\quad$ Conditional Proof	
(2)	$\quad\quad A \wedge B$	Hypothesis
(3)	$\quad\quad (A \wedge B) \rightarrow A$	Add Axiom 3
(4)	$\quad\quad A$	MP (3), (2)
(5)	$\quad\quad (A \wedge B) \rightarrow B$	Add Axiom 4
(6)	$\quad\quad B$	MP (5), (2)
(7)	$\quad\quad B \rightarrow C$	MP (1), (4)

(8)	$\qquad C$	MP (7), (6)
(9)	$\quad (A \land B) \to C$	Conclusion
(10)	$(A \to (B \to C)) \to ((A \land B) \to C)$	Conclusion

□

Proposition 18. [proposition:implication44]

$$((A \land B) \to C) \to (A \to (B \to C))$$

Beweis.

	Conditional Proof	
(1)	$\quad (A \land B) \to C$	Hypothesis
	$\quad$ Conditional Proof	
(2)	$\qquad A$	Hypothesis
(3)	$\qquad B \to (A \to (A \land B))$	Add Axiom 5
	$\qquad$ Conditional Proof	
(4)	$\qquad\quad B$	Hypothesis
(5)	$\qquad\quad A \to (A \land B)$	MP (3), (4)
(6)	$\qquad\quad A \land B$	MP (5), (2)
(7)	$\qquad\quad C$	MP (1), (6)
(8)	$\qquad B \to C$	Conclusion
(9)	$\quad A \to (B \to C)$	Conclusion
(10)	$((A \land B) \to C) \to (A \to (B \to C))$	Conclusion

□

Literaturverzeichnis

[1] *P.S. Novikov*, Grundzüge der mathematischen Logik, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1973 5

[2] *V. Detlovs, K. Podnieks*, Introduction to Mathematical Logic, http://www.ltn.lv/~podnieks/mlog/ml.htm 5

[3] *D. Hilbert, W. Ackermann*, Grundzüge der theoretischen Logik, 2. Ed., Springer, Berlin 1938. Siehe auch http://www.math.uwaterloo.ca/~snburris/htdocs/scav/hilbert/hilbert.html 5, 13

[4] *E. Mendelson*, Introduction to Mathematical Logic, 3. ed., Wadsworth, Belmont, CA 1987

[5] qedeq_logic_v1 http://www.qedeq.org/0_04_03/doc/math/qedeq_logic_v1.xml

Index