

Further Theorems of Propositional Calculus

Michael Meyling

<module@qedeq.org>

This document is part of the project “Hilbert II”. To get more information about this project look at:
<http://www.qedeq.org>.

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. See also under <http://www.gnu.org/copyleft/>

Abstract

This module includes proofs of propositional calculus theorems. The following theorems and proofs are adapted from D. Hilbert and W. Ackermann’s ‘Grundzuege der theoretischen Logik’ (Berlin 1928, Springer)

Specification

This document has the following specification:

Name:	prophilbert2
Version:	1.00.00
Rule version:	1.00.00
Origin:	http://www.qedeq.org/0_00_53/prophilbert2_1.00.00_1.00.00.qedeq

Author of this module:

Michael Meyling

mime@qedeq.org

References

This document uses the results of the following documents:

Name:	prophilbert1
Version:	1.00.00
Rule version:	1.00.00
Origin:	prophilbert1_1.00.00_1.00.00.qedeq
pdf:	prophilbert1_1.00.00_1.00.00.pdf

Content

Negation of a conjunction:

Theorem 0.1 (hilb18).

$$\neg(P \wedge Q) \rightarrow (\neg P \vee \neg Q)$$

Proof.

- 1 $\neg\neg P \rightarrow P$
- 2 $\neg\neg Q \rightarrow Q$
- 3 $\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
- 4 $\neg(P \wedge Q) \rightarrow (\neg P \vee \neg Q)$

add sentence hilb6
 replace P by Q in 1
 replace Q by $\neg P \vee \neg Q$ in 2
 reverse abbreviation and in 3 at occurrence 1

□

The reverse of a negation of a conjunction:

Theorem 0.2 (hilb19).

$$(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow \neg(P \wedge Q)$$

Proof.

- 1 $P \rightarrow \neg\neg P$
- 2 $Q \rightarrow \neg\neg Q$
- 3 $(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow \neg\neg(\neg P \vee \neg Q)$
- 4 $(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow \neg(P \wedge Q)$

add sentence hilb5
 replace P by Q in 1
 replace Q by $\neg P \vee \neg Q$ in 2
 reverse abbreviation and in 3 at occurrence 1

□

Negation of a disjunction:

Theorem 0.3 (hilb20).

$$\neg(P \vee Q) \rightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$$

Proof.

- 1 $\neg\neg P \rightarrow P$
- 2 $\neg\neg Q \rightarrow Q$
- 3 $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((A \vee P) \rightarrow (A \vee Q))$
- 4 $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((B \vee P) \rightarrow (B \vee Q))$
- 5 $(P \rightarrow C) \rightarrow ((B \vee P) \rightarrow (B \vee C))$
- 6 $(D \rightarrow C) \rightarrow ((B \vee D) \rightarrow (B \vee C))$
- 7 $(D \rightarrow C) \rightarrow ((Q \vee D) \rightarrow (Q \vee C))$
- 8 $(D \rightarrow P) \rightarrow ((Q \vee D) \rightarrow (Q \vee P))$
- 9 $(\neg\neg P \rightarrow P) \rightarrow ((Q \vee \neg\neg P) \rightarrow (Q \vee P))$
- 10 $(Q \vee \neg\neg P) \rightarrow (Q \vee P)$
- 11 $(P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P)$
- 12 $(P \vee A) \rightarrow (A \vee P)$
- 13 $(B \vee A) \rightarrow (A \vee B)$
- 14 $(B \vee P) \rightarrow (P \vee B)$
- 15 $(Q \vee P) \rightarrow (P \vee Q)$
- 16 $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((A \rightarrow P) \rightarrow (A \rightarrow Q))$
- 17 $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((B \rightarrow P) \rightarrow (B \rightarrow Q))$
- 18 $(P \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow P) \rightarrow (B \rightarrow C))$

add sentence hilb6
 replace P by Q in 1
 add axiom axiom4
 replace A by B in 3
 replace Q by C in 4
 replace P by D in 5
 replace B by Q in 6
 replace C by P in 7
 replace D by $\neg\neg P$ in 8
 MP with 1, 9
 add axiom axiom3
 replace Q by A in 11
 replace P by B in 12
 replace A by P in 13
 replace B by Q in 14
 add sentence hilb1
 replace A by B in 16
 replace Q by C in 17

19	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow C))$	replace P by D in 18
20	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((Q \vee \neg\neg P) \rightarrow D) \rightarrow ((Q \vee \neg\neg P) \rightarrow C))$	replace B by $Q \vee \neg\neg P$ in 19
21	$(D \rightarrow (P \vee Q)) \rightarrow (((Q \vee \neg\neg P) \rightarrow D) \rightarrow ((Q \vee \neg\neg P) \rightarrow (P \vee Q)))$	replace C by $P \vee Q$ in 20
22	$((Q \vee P) \rightarrow (P \vee Q)) \rightarrow (((Q \vee \neg\neg P) \rightarrow (Q \vee P)) \rightarrow ((Q \vee \neg\neg P) \rightarrow (P \vee Q)))$	replace D by $Q \vee P$ in 21
23	$((Q \vee \neg\neg P) \rightarrow (Q \vee P)) \rightarrow ((Q \vee \neg\neg P) \rightarrow (P \vee Q))$	MP with 15, 22
24	$(Q \vee \neg\neg P) \rightarrow (P \vee Q)$	MP with 10, 23
25	$(B \vee Q) \rightarrow (Q \vee B)$	replace A by Q in 13
26	$(\neg\neg P \vee Q) \rightarrow (Q \vee \neg\neg P)$	replace B by $\neg\neg P$ in 25
27	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((\neg\neg P \vee Q) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg\neg P \vee Q) \rightarrow C))$	replace B by $\neg\neg P \vee Q$ in 19
28	$(D \rightarrow (P \vee Q)) \rightarrow (((\neg\neg P \vee Q) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg\neg P \vee Q) \rightarrow (P \vee Q)))$	replace C by $P \vee Q$ in 27
29	$((Q \vee \neg\neg P) \rightarrow (P \vee Q)) \rightarrow (((\neg\neg P \vee Q) \rightarrow (Q \vee \neg\neg P)) \rightarrow ((\neg\neg P \vee Q) \rightarrow (P \vee Q)))$	replace D by $Q \vee \neg\neg P$ in 28
30	$((\neg\neg P \vee Q) \rightarrow (Q \vee \neg\neg P)) \rightarrow ((\neg\neg P \vee Q) \rightarrow (P \vee Q))$	MP with 24, 29
31	$(\neg\neg P \vee Q) \rightarrow (P \vee Q)$	MP with 26, 30
32	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$	add sentence hilb7
33	$(P \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg P)$	replace Q by A in 32
34	$(B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$	replace P by B in 33
35	$(B \rightarrow (P \vee Q)) \rightarrow (\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg B)$	replace A by $P \vee Q$ in 34
36	$((\neg\neg P \vee Q) \rightarrow (P \vee Q)) \rightarrow (\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg(\neg\neg P \vee Q))$	replace B by $\neg\neg P \vee Q$ in 35
37	$\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg(\neg\neg P \vee Q)$	MP with 31, 36
38	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$	add sentence defimp11
39	$(\neg P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$	add sentence defimp12
40	$(P \rightarrow A) \rightarrow (\neg P \vee A)$	replace Q by A in 38
41	$(B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \vee A)$	replace P by B in 40
42	$(\neg P \vee A) \rightarrow (P \rightarrow A)$	replace Q by A in 39
43	$(\neg B \vee A) \rightarrow (B \rightarrow A)$	replace P by B in 42
44	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((\neg\neg P \vee D) \rightarrow (\neg\neg P \vee C))$	replace B by $\neg\neg P$ in 6
45	$(D \rightarrow Q) \rightarrow ((\neg\neg P \vee D) \rightarrow (\neg\neg P \vee Q))$	replace C by Q in 44
46	$(\neg\neg Q \rightarrow Q) \rightarrow ((\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \rightarrow (\neg\neg P \vee Q))$	replace D by $\neg\neg Q$ in 45
47	$(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \rightarrow (\neg\neg P \vee Q)$	MP with 2, 46
48	$(B \rightarrow (\neg\neg P \vee Q)) \rightarrow (\neg(\neg\neg P \vee Q) \rightarrow \neg B)$	replace A by $\neg\neg P \vee Q$ in 34
49	$((\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \rightarrow (\neg\neg P \vee Q)) \rightarrow (\neg(\neg\neg P \vee Q) \rightarrow \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))$	replace B by $\neg\neg P \vee \neg\neg Q$ in 48
50	$\neg(\neg\neg P \vee Q) \rightarrow \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)$	MP with 47, 49
51	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((\neg\neg(P \vee Q) \vee D) \rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee C))$	replace B by $\neg\neg(P \vee Q)$ in 6
52	$(D \rightarrow \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \rightarrow ((\neg\neg(P \vee Q) \vee D) \rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)))$	replace C by $\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)$ in 51
53	$(\neg(\neg\neg P \vee Q) \rightarrow \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \rightarrow ((\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(\neg\neg P \vee Q)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)))$	replace D by $\neg(\neg\neg P \vee Q)$ in 52
54	$(\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(\neg\neg P \vee Q)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))$	MP with 50, 53
55	$(B \rightarrow \neg(\neg\neg P \vee Q)) \rightarrow (\neg B \vee \neg(\neg\neg P \vee Q))$	replace A by $\neg(\neg\neg P \vee Q)$ in 41
56	$(\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg(\neg\neg P \vee Q)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(\neg\neg P \vee Q))$	replace B by $\neg(P \vee Q)$ in 55
57	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg(\neg\neg P \vee Q)) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg(\neg\neg P \vee Q)) \rightarrow C))$	replace B by $\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg(\neg\neg P \vee Q)$ in 19

58	$(D \rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))) \rightarrow (((\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))))$	replace C by $\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)$ in 57
59	$((\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))) \rightarrow (((\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \rightarrow ((\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))))$	replace D by $\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)$ in 58
60	$((\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))) \rightarrow ((\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)))$	MP with 54, 59
61	$(\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))$	MP with 56, 60
62	$(\neg B \vee \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \rightarrow (B \rightarrow \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))$	replace A by $\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)$ in 43
63	$(\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \rightarrow (\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))$	replace B by $\neg(P \vee Q)$ in 62
64	$(D \rightarrow (\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))) \rightarrow (((\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))))$	replace C by $\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)$ in 57
65	$((\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \rightarrow (\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))) \rightarrow (((\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \rightarrow ((\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))))$	replace D by $\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)$ in 64
66	$((\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))) \rightarrow ((\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)))$	MP with 63, 65
67	$(\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))$	MP with 61, 66
68	$\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)$	MP with 37, 67
69	$\neg(P \vee Q) \rightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$	reverse abbreviation and in 68 at occurrence 1

□

Reverse of a negation of a disjunction:

Theorem 0.4 (hilb21).

$$(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg(P \vee Q)$$

Proof.

1	$P \rightarrow \neg\neg P$	add sentence hilb5
2	$Q \rightarrow \neg\neg Q$	replace P by Q in 1
3	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((A \vee P) \rightarrow (A \vee Q))$	add axiom axiom4
4	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((B \vee P) \rightarrow (B \vee Q))$	replace A by B in 3
5	$(P \rightarrow C) \rightarrow ((B \vee P) \rightarrow (B \vee C))$	replace Q by C in 4
6	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((B \vee D) \rightarrow (B \vee C))$	replace P by D in 5
7	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((Q \vee D) \rightarrow (Q \vee C))$	replace B by Q in 6
8	$(D \rightarrow \neg\neg P) \rightarrow ((Q \vee D) \rightarrow (Q \vee \neg\neg P))$	replace C by $\neg\neg P$ in 7
9	$(P \rightarrow \neg\neg P) \rightarrow ((Q \vee P) \rightarrow (Q \vee \neg\neg P))$	replace D by P in 8
10	$(Q \vee P) \rightarrow (Q \vee \neg\neg P)$	MP with 1, 9
11	$(P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P)$	add axiom axiom3
12	$(P \vee A) \rightarrow (A \vee P)$	replace Q by A in 11
13	$(B \vee A) \rightarrow (A \vee B)$	replace P by B in 12

14	$(B \vee \neg\neg P) \rightarrow (\neg\neg P \vee B)$	replace A by $\neg\neg P$ in 13
15	$(Q \vee \neg\neg P) \rightarrow (\neg\neg P \vee Q)$	replace B by Q in 14
16	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((A \rightarrow P) \rightarrow (A \rightarrow Q))$	add sentence hilb1
17	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((B \rightarrow P) \rightarrow (B \rightarrow Q))$	replace A by B in 16
18	$(P \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow P) \rightarrow (B \rightarrow C))$	replace Q by C in 17
19	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow C))$	replace P by D in 18
20	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((Q \vee P) \rightarrow D) \rightarrow ((Q \vee P) \rightarrow C))$	replace B by $Q \vee P$ in 19
21	$(D \rightarrow (\neg\neg P \vee Q)) \rightarrow (((Q \vee P) \rightarrow D) \rightarrow ((Q \vee P) \rightarrow (\neg\neg P \vee Q)))$	replace C by $\neg\neg P \vee Q$ in 20
22	$((Q \vee \neg\neg P) \rightarrow (\neg\neg P \vee Q)) \rightarrow (((Q \vee P) \rightarrow (Q \vee \neg\neg P)) \rightarrow ((Q \vee P) \rightarrow (\neg\neg P \vee Q)))$	replace D by $Q \vee \neg\neg P$ in 21
23	$((Q \vee P) \rightarrow (Q \vee \neg\neg P)) \rightarrow ((Q \vee P) \rightarrow (\neg\neg P \vee Q))$	MP with 15, 22
24	$(Q \vee P) \rightarrow (\neg\neg P \vee Q)$	MP with 10, 23
25	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((P \vee Q) \rightarrow D) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow C))$	replace B by $P \vee Q$ in 19
26	$(D \rightarrow (\neg\neg P \vee Q)) \rightarrow (((P \vee Q) \rightarrow D) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow (\neg\neg P \vee Q)))$	replace C by $\neg\neg P \vee Q$ in 25
27	$((Q \vee P) \rightarrow (\neg\neg P \vee Q)) \rightarrow (((P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P)) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow (\neg\neg P \vee Q)))$	replace D by $Q \vee P$ in 26
28	$((P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P)) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow (\neg\neg P \vee Q))$	MP with 24, 27
29	$(P \vee Q) \rightarrow (\neg\neg P \vee Q)$	MP with 11, 28
30	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$	add sentence hilb7
31	$(P \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg P)$	replace Q by A in 30
32	$(B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$	replace P by B in 31
33	$(B \rightarrow (\neg\neg P \vee Q)) \rightarrow (\neg(\neg\neg P \vee Q) \rightarrow \neg B)$	replace A by $\neg\neg P \vee Q$ in 32
34	$((P \vee Q) \rightarrow (\neg\neg P \vee Q)) \rightarrow (\neg(\neg\neg P \vee Q) \rightarrow \neg(P \vee Q))$	replace B by $P \vee Q$ in 33
35	$\neg(\neg\neg P \vee Q) \rightarrow \neg(P \vee Q)$	MP with 29, 34
36	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$	add sentence defimp1
37	$(\neg P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$	add sentence defimp2
38	$(B \vee \neg(P \vee Q)) \rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee B)$	replace A by $\neg(P \vee Q)$ in 13
39	$(P \rightarrow A) \rightarrow (\neg P \vee A)$	replace Q by A in 36
40	$(B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \vee A)$	replace P by B in 39
41	$(B \rightarrow \neg(P \vee Q)) \rightarrow (\neg B \vee \neg(P \vee Q))$	replace A by $\neg(P \vee Q)$ in 40
42	$(\neg P \vee A) \rightarrow (P \rightarrow A)$	replace Q by A in 37
43	$(\neg B \vee A) \rightarrow (B \rightarrow A)$	replace P by B in 42
44	$(\neg B \vee \neg(P \vee Q)) \rightarrow (B \rightarrow \neg(P \vee Q))$	replace A by $\neg(P \vee Q)$ in 43
45	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((\neg\neg P \vee D) \rightarrow (\neg\neg P \vee C))$	replace B by $\neg\neg P$ in 6
46	$(D \rightarrow \neg\neg Q) \rightarrow ((\neg\neg P \vee D) \rightarrow (\neg\neg P \vee \neg\neg Q))$	replace C by $\neg\neg Q$ in 45
47	$(Q \rightarrow \neg\neg Q) \rightarrow ((\neg\neg P \vee Q) \rightarrow (\neg\neg P \vee \neg\neg Q))$	replace D by Q in 46
48	$(\neg\neg P \vee Q) \rightarrow (\neg\neg P \vee \neg\neg Q)$	MP with 2, 47
49	$(B \rightarrow (\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \rightarrow (\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \rightarrow \neg B)$	replace A by $\neg\neg P \vee \neg\neg Q$ in 32
50	$((\neg\neg P \vee Q) \rightarrow (\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \rightarrow (\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \rightarrow \neg(\neg\neg P \vee Q))$	replace B by $\neg\neg P \vee Q$ in 49
51	$\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \rightarrow \neg(\neg\neg P \vee Q)$	MP with 48, 50
52	$(B \rightarrow \neg(\neg\neg P \vee Q)) \rightarrow (\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \rightarrow \neg B)$	replace A by $\neg(\neg\neg P \vee Q)$ in 32
53	$(\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \rightarrow \neg(\neg\neg P \vee Q)) \rightarrow (\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))$	replace B by $\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)$ in 52
54	$\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)$	MP with 51, 53
55	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((\neg(P \vee Q) \vee D) \rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee C))$	replace B by $\neg(P \vee Q)$ in 6
56	$(D \rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \rightarrow ((\neg(P \vee Q) \vee D) \rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)))$	replace C by $\neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)$ in 55
57	$(\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \rightarrow ((\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)) \rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)))$	replace D by $\neg\neg(\neg\neg P \vee Q)$ in 56

78	$(\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \vee \neg(P \vee Q)) \rightarrow (\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \rightarrow \neg(P \vee Q))$	replace B by $\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)$ in 44
79	$(D \rightarrow (\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \rightarrow \neg(P \vee Q))) \rightarrow (((\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \rightarrow \neg(P \vee Q)) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \rightarrow \neg(P \vee Q)) \rightarrow (\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \rightarrow \neg(P \vee Q))))$	replace C by $\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \rightarrow \neg(P \vee Q)$ in 73
80	$((\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \vee \neg(P \vee Q)) \rightarrow (\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \rightarrow \neg(P \vee Q))) \rightarrow (((\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \rightarrow \neg(P \vee Q)) \rightarrow (\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \vee \neg(P \vee Q))) \rightarrow ((\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \rightarrow \neg(P \vee Q)) \rightarrow (\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \rightarrow \neg(P \vee Q))))$	replace D by $\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \vee \neg(P \vee Q)$ in 79
81	$((\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \rightarrow \neg(P \vee Q)) \rightarrow (\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \vee \neg(P \vee Q))) \rightarrow ((\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \rightarrow \neg(P \vee Q)) \rightarrow (\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \rightarrow \neg(P \vee Q)))$	MP with 78, 80
82	$(\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \rightarrow \neg(P \vee Q)) \rightarrow (\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \rightarrow \neg(P \vee Q))$	MP with 77, 81
83	$\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \rightarrow \neg(P \vee Q)$	MP with 35, 82
84	$(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg(P \vee Q)$	reverse abbreviation and in 83 at occurrence 1

□

The Conjunction is commutative:

Theorem 0.5 (hilb22).

$$(P \wedge Q) \rightarrow (Q \wedge P)$$

Proof.

1	$P \rightarrow P$	add sentence hilb2
2	$Q \rightarrow Q$	replace P by Q in 1
3	$(P \wedge Q) \rightarrow (P \wedge Q)$	replace Q by $P \wedge Q$ in 2
4	$(P \wedge Q) \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$	use abbreviation and in 3 at occurrence 2
5	$(Q \vee P) \rightarrow (P \vee Q)$	add sentence hilb10
6	$(A \vee P) \rightarrow (P \vee A)$	replace Q by A in 5
7	$(A \vee B) \rightarrow (B \vee A)$	replace P by B in 6
8	$(\neg Q \vee B) \rightarrow (B \vee \neg Q)$	replace A by $\neg Q$ in 7
9	$(\neg Q \vee \neg P) \rightarrow (\neg P \vee \neg Q)$	replace B by $\neg P$ in 8
10	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$	add sentence hilb7
11	$(P \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg P)$	replace Q by A in 10
12	$(B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$	replace P by B in 11
13	$(B \rightarrow (\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow (\neg(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow \neg B)$	replace A by $\neg P \vee \neg Q$ in 12
14	$((\neg Q \vee \neg P) \rightarrow (\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow (\neg(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow \neg(\neg Q \vee \neg P))$	replace B by $\neg Q \vee \neg P$ in 13
15	$\neg(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow \neg(\neg Q \vee \neg P)$	MP with 9, 14
16	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$	add sentence defimpl1
17	$(\neg P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$	add sentence defimpl2
18	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((A \vee P) \rightarrow (A \vee Q))$	add axiom axiom4
19	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((B \vee P) \rightarrow (B \vee Q))$	replace A by B in 18
20	$(P \rightarrow C) \rightarrow ((B \vee P) \rightarrow (B \vee C))$	replace Q by C in 19
21	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((B \vee D) \rightarrow (B \vee C))$	replace P by D in 20
22	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((\neg(P \wedge Q) \vee D) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee C))$	replace B by $\neg(P \wedge Q)$ in 21
23	$(D \rightarrow \neg(\neg Q \vee \neg P)) \rightarrow ((\neg(P \wedge Q) \vee D) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee \neg(\neg Q \vee \neg P)))$	replace C by $\neg(\neg Q \vee \neg P)$ in 22

24	$(\neg(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow \neg(\neg Q \vee \neg P)) \rightarrow ((\neg(P \wedge Q) \vee \neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee \neg(\neg Q \vee \neg P)))$	replace D by $\neg(\neg P \vee \neg Q)$ in 23
25	$(\neg(P \wedge Q) \vee \neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee \neg(\neg Q \vee \neg P))$	MP with 15, 24
26	$(P \rightarrow A) \rightarrow (\neg P \vee A)$	replace Q by A in 16
27	$(B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \vee A)$	replace P by B in 26
28	$(B \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow (\neg B \vee \neg(\neg P \vee \neg Q))$	replace A by $\neg(\neg P \vee \neg Q)$ in 27
29	$((P \wedge Q) \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee \neg(\neg P \vee \neg Q))$	replace B by $P \wedge Q$ in 28
30	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((A \rightarrow P) \rightarrow (A \rightarrow Q))$	add sentence hilb1
31	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((B \rightarrow P) \rightarrow (B \rightarrow Q))$	replace A by B in 30
32	$(P \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow P) \rightarrow (B \rightarrow C))$	replace Q by C in 31
33	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow C))$	replace P by D in 32
34	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((P \wedge Q) \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow D) \rightarrow (((P \wedge Q) \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow C)$	replace B by $(P \wedge Q) \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$ in 33
35	$(D \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee \neg(\neg Q \vee \neg P))) \rightarrow (((P \wedge Q) \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow D) \rightarrow (((P \wedge Q) \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee \neg(\neg Q \vee \neg P)))$	replace C by $\neg(P \wedge Q) \vee \neg(\neg Q \vee \neg P)$ in 34
36	$((\neg(P \wedge Q) \vee \neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee \neg(\neg Q \vee \neg P))) \rightarrow (((P \wedge Q) \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee \neg(\neg P \vee \neg Q))) \rightarrow (((P \wedge Q) \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee \neg(\neg Q \vee \neg P)))$	replace D by $\neg(P \wedge Q) \vee \neg(\neg P \vee \neg Q)$ in 35
37	$((P \wedge Q) \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee \neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow (((P \wedge Q) \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee \neg(\neg Q \vee \neg P)))$	MP with 25, 36
38	$((P \wedge Q) \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee \neg(\neg Q \vee \neg P))$	MP with 29, 37
39	$(\neg P \vee A) \rightarrow (P \rightarrow A)$	replace Q by A in 17
40	$(\neg B \vee A) \rightarrow (B \rightarrow A)$	replace P by B in 39
41	$(\neg B \vee \neg(\neg Q \vee \neg P)) \rightarrow (B \rightarrow \neg(\neg Q \vee \neg P))$	replace A by $\neg(\neg Q \vee \neg P)$ in 40
42	$(\neg(P \wedge Q) \vee \neg(\neg Q \vee \neg P)) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow \neg(\neg Q \vee \neg P))$	replace B by $P \wedge Q$ in 41
43	$(D \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow \neg(\neg Q \vee \neg P))) \rightarrow (((P \wedge Q) \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow D) \rightarrow (((P \wedge Q) \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow \neg(\neg Q \vee \neg P)))$	replace C by $(P \wedge Q) \rightarrow \neg(\neg Q \vee \neg P)$ in 34
44	$((\neg(P \wedge Q) \vee \neg(\neg Q \vee \neg P)) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow \neg(\neg Q \vee \neg P))) \rightarrow (((P \wedge Q) \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee \neg(\neg Q \vee \neg P))) \rightarrow (((P \wedge Q) \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow \neg(\neg Q \vee \neg P)))$	replace D by $\neg(P \wedge Q) \vee \neg(\neg Q \vee \neg P)$ in 43
45	$((P \wedge Q) \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee \neg(\neg Q \vee \neg P)) \rightarrow (((P \wedge Q) \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow \neg(\neg Q \vee \neg P)))$	MP with 42, 44
46	$((P \wedge Q) \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow \neg(\neg Q \vee \neg P))$	MP with 38, 45
47	$(P \wedge Q) \rightarrow \neg(\neg Q \vee \neg P)$	MP with 4, 46
48	$(P \wedge Q) \rightarrow (Q \wedge P)$	reverse abbreviation and in 47 at occurrence 1

□

A technical lemma that is similar to the previous one:

Theorem 0.6 (hilb23).

$$(Q \wedge P) \rightarrow (P \wedge Q)$$

Proof.

$$1 \quad (P \wedge Q) \rightarrow (Q \wedge P)$$

add sentence hilb22

2	$(P \wedge A) \rightarrow (A \wedge P)$	replace Q by A in 1
3	$(B \wedge A) \rightarrow (A \wedge B)$	replace P by B in 2
4	$(B \wedge P) \rightarrow (P \wedge B)$	replace A by P in 3
5	$(Q \wedge P) \rightarrow (P \wedge Q)$	replace B by Q in 4

□

Reduction of a conjunction:

Theorem 0.7 (hilb24).

$$(P \wedge Q) \rightarrow P$$

Proof.

1	$P \rightarrow (P \vee Q)$	add axiom axiom2
2	$P \rightarrow (P \vee A)$	replace Q by A in 1
3	$B \rightarrow (B \vee A)$	replace P by B in 2
4	$B \rightarrow (B \vee \neg Q)$	replace A by $\neg Q$ in 3
5	$\neg P \rightarrow (\neg P \vee \neg Q)$	replace B by $\neg P$ in 4
6	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$	add sentence hilb7
7	$(P \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg P)$	replace Q by A in 6
8	$(B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$	replace P by B in 7
9	$(B \rightarrow (\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow (\neg(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow \neg B)$	replace A by $\neg P \vee \neg Q$ in 8
10	$(\neg P \rightarrow (\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow (\neg(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow \neg\neg P)$	replace B by $\neg P$ in 9
11	$\neg(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow \neg\neg P$	MP with 5, 10
12	$(P \wedge Q) \rightarrow \neg\neg P$	reverse abbreviation and in 11 at occurrence 1
13	$\neg\neg P \rightarrow P$	add sentence hilb6
14	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$	add sentence defimpl1
15	$(\neg P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$	add sentence defimpl2
16	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((A \vee P) \rightarrow (A \vee Q))$	add axiom axiom4
17	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((B \vee P) \rightarrow (B \vee Q))$	replace A by B in 16
18	$(P \rightarrow C) \rightarrow ((B \vee P) \rightarrow (B \vee C))$	replace Q by C in 17
19	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((B \vee D) \rightarrow (B \vee C))$	replace P by D in 18
20	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((\neg(P \wedge Q) \vee D) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee C))$	replace B by $\neg(P \wedge Q)$ in 19
21	$(D \rightarrow P) \rightarrow ((\neg(P \wedge Q) \vee D) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee P))$	replace C by P in 20
22	$(\neg\neg P \rightarrow P) \rightarrow ((\neg(P \wedge Q) \vee \neg\neg P) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee P))$	replace D by $\neg\neg P$ in 21
23	$(\neg(P \wedge Q) \vee \neg\neg P) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee P)$	MP with 13, 22
24	$(P \rightarrow A) \rightarrow (\neg P \vee A)$	replace Q by A in 14
25	$(B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \vee A)$	replace P by B in 24
26	$(B \rightarrow \neg\neg P) \rightarrow (\neg B \vee \neg\neg P)$	replace A by $\neg\neg P$ in 25
27	$((P \wedge Q) \rightarrow \neg\neg P) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee \neg\neg P)$	replace B by $P \wedge Q$ in 26
28	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((A \rightarrow P) \rightarrow (A \rightarrow Q))$	add sentence hilb1
29	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((B \rightarrow P) \rightarrow (B \rightarrow Q))$	replace A by B in 28
30	$(P \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow P) \rightarrow (B \rightarrow C))$	replace Q by C in 29
31	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow C))$	replace P by D in 30
32	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((P \wedge Q) \rightarrow \neg\neg P) \rightarrow D) \rightarrow$ $((P \wedge Q) \rightarrow \neg\neg P) \rightarrow C)$	replace B by $(P \wedge Q) \rightarrow \neg\neg P$ in 31
33	$(D \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee P)) \rightarrow (((P \wedge Q) \rightarrow \neg\neg P) \rightarrow$ $D) \rightarrow (((P \wedge Q) \rightarrow \neg\neg P) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee P))$	replace C by $\neg(P \wedge Q) \vee P$ in 32
34	$((\neg(P \wedge Q) \vee \neg\neg P) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee P)) \rightarrow$ $((P \wedge Q) \rightarrow \neg\neg P) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee P)) \rightarrow$ $((P \wedge Q) \rightarrow \neg\neg P) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee P))$	replace D by $\neg(P \wedge Q) \vee \neg\neg P$ in 33

35	$((P \wedge Q) \rightarrow \neg\neg P) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee \neg\neg P) \rightarrow$	MP with 23, 34
	$((P \wedge Q) \rightarrow \neg\neg P) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee P)$	
36	$((P \wedge Q) \rightarrow \neg\neg P) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee P)$	MP with 27, 35
37	$(\neg P \vee A) \rightarrow (P \rightarrow A)$	replace Q by A in 15
38	$(\neg B \vee A) \rightarrow (B \rightarrow A)$	replace P by B in 37
39	$(\neg B \vee P) \rightarrow (B \rightarrow P)$	replace A by P in 38
40	$(\neg(P \wedge Q) \vee P) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow P)$	replace B by $P \wedge Q$ in 39
41	$(D \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow P)) \rightarrow (((P \wedge Q) \rightarrow \neg\neg P) \rightarrow$	replace C by $(P \wedge Q) \rightarrow P$ in 32
	$D) \rightarrow (((P \wedge Q) \rightarrow \neg\neg P) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow P))$	
42	$((\neg(P \wedge Q) \vee P) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow P)) \rightarrow (((P \wedge Q) \rightarrow$	replace D by $\neg(P \wedge Q) \vee P$ in 41
	$\neg\neg P) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee P) \rightarrow (((P \wedge Q) \rightarrow \neg\neg P) \rightarrow$	
	$((P \wedge Q) \rightarrow P))$	
43	$((P \wedge Q) \rightarrow \neg\neg P) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee P) \rightarrow$	MP with 40, 42
	$((P \wedge Q) \rightarrow \neg\neg P) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow P)$	
44	$((P \wedge Q) \rightarrow \neg\neg P) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow P)$	MP with 36, 43
45	$(P \wedge Q) \rightarrow P$	MP with 12, 44

□

Another form of a reduction of a conjunction:

Theorem 0.8 (hilb25).

$$(P \wedge Q) \rightarrow Q$$

Proof.

1	$(P \wedge Q) \rightarrow P$	add sentence hilb24
2	$(P \wedge A) \rightarrow P$	replace Q by A in 1
3	$(B \wedge A) \rightarrow B$	replace P by B in 2
4	$(B \wedge P) \rightarrow B$	replace A by P in 3
5	$(Q \wedge P) \rightarrow Q$	replace B by Q in 4
6	$(Q \wedge P) \rightarrow (P \wedge Q)$	add sentence hilb23
7	$(A \wedge P) \rightarrow (P \wedge A)$	replace Q by A in 6
8	$(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$	replace P by B in 7
9	$(P \wedge B) \rightarrow (B \wedge P)$	replace A by P in 8
10	$(P \wedge Q) \rightarrow (Q \wedge P)$	replace B by Q in 9
11	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$	add sentence defimpl1
12	$(\neg P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$	add sentence defimpl2
13	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$	add sentence hilb7
14	$(P \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg P)$	replace Q by A in 13
15	$(B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$	replace P by B in 14
16	$(B \rightarrow (Q \wedge P)) \rightarrow (\neg(Q \wedge P) \rightarrow \neg B)$	replace A by $Q \wedge P$ in 15
17	$((P \wedge Q) \rightarrow (Q \wedge P)) \rightarrow (\neg(Q \wedge P) \rightarrow \neg(P \wedge Q))$	replace B by $P \wedge Q$ in 16
18	$\neg(Q \wedge P) \rightarrow \neg(P \wedge Q)$	MP with 10, 17
19	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((A \vee P) \rightarrow (A \vee Q))$	add axiom axiom4
20	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((B \vee P) \rightarrow (B \vee Q))$	replace A by B in 19
21	$(P \rightarrow C) \rightarrow ((B \vee P) \rightarrow (B \vee C))$	replace Q by C in 20
22	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((B \vee D) \rightarrow (B \vee C))$	replace P by D in 21
23	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((Q \vee D) \rightarrow (Q \vee C))$	replace B by Q in 22
24	$(D \rightarrow \neg(P \wedge Q)) \rightarrow ((Q \vee D) \rightarrow (Q \vee \neg(P \wedge Q)))$	replace C by $\neg(P \wedge Q)$ in 23
25	$(\neg(Q \wedge P) \rightarrow \neg(P \wedge Q)) \rightarrow ((Q \vee \neg(Q \wedge P)) \rightarrow$	replace D by $\neg(Q \wedge P)$ in 24
	$(Q \vee \neg(P \wedge Q)))$	
26	$(Q \vee \neg(Q \wedge P)) \rightarrow (Q \vee \neg(P \wedge Q))$	MP with 18, 25

27	$(P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P)$	add axiom axiom3
28	$(P \vee A) \rightarrow (A \vee P)$	replace Q by A in 27
29	$(B \vee A) \rightarrow (A \vee B)$	replace P by B in 28
30	$(B \vee \neg(P \wedge Q)) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee B)$	replace A by $\neg(P \wedge Q)$ in 29
31	$(Q \vee \neg(P \wedge Q)) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee Q)$	replace B by Q in 30
32	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((A \rightarrow P) \rightarrow (A \rightarrow Q))$	add sentence hilb1
33	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((B \rightarrow P) \rightarrow (B \rightarrow Q))$	replace A by B in 32
34	$(P \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow P) \rightarrow (B \rightarrow C))$	replace Q by C in 33
35	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow C))$	replace P by D in 34
36	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((Q \vee \neg(Q \wedge P)) \rightarrow D) \rightarrow ((Q \vee \neg(Q \wedge P)) \rightarrow C))$	replace B by $Q \vee \neg(Q \wedge P)$ in 35
37	$(D \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee Q)) \rightarrow (((Q \vee \neg(Q \wedge P)) \rightarrow D) \rightarrow ((Q \vee \neg(Q \wedge P)) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee Q)))$	replace C by $\neg(P \wedge Q) \vee Q$ in 36
38	$((Q \vee \neg(P \wedge Q)) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee Q)) \rightarrow (((Q \vee \neg(Q \wedge P)) \rightarrow (Q \vee \neg(P \wedge Q))) \rightarrow ((Q \vee \neg(Q \wedge P)) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee Q)))$	replace D by $Q \vee \neg(P \wedge Q)$ in 37
39	$((Q \vee \neg(Q \wedge P)) \rightarrow (Q \vee \neg(P \wedge Q))) \rightarrow ((Q \vee \neg(Q \wedge P)) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee Q))$	MP with 31, 38
40	$(Q \vee \neg(Q \wedge P)) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee Q)$	MP with 26, 39
41	$(B \vee Q) \rightarrow (Q \vee B)$	replace A by Q in 29
42	$(\neg(Q \wedge P) \vee Q) \rightarrow (Q \vee \neg(Q \wedge P))$	replace B by $\neg(Q \wedge P)$ in 41
43	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((\neg(Q \wedge P) \vee Q) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg(Q \wedge P) \vee Q) \rightarrow C))$	replace B by $\neg(Q \wedge P) \vee Q$ in 35
44	$(D \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee Q)) \rightarrow (((\neg(Q \wedge P) \vee Q) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg(Q \wedge P) \vee Q) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee Q)))$	replace C by $\neg(P \wedge Q) \vee Q$ in 43
45	$((Q \vee \neg(Q \wedge P)) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee Q)) \rightarrow (((\neg(Q \wedge P) \vee Q) \rightarrow (Q \vee \neg(Q \wedge P))) \rightarrow ((\neg(Q \wedge P) \vee Q) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee Q)))$	replace D by $Q \vee \neg(Q \wedge P)$ in 44
46	$((\neg(Q \wedge P) \vee Q) \rightarrow (Q \vee \neg(Q \wedge P))) \rightarrow ((\neg(Q \wedge P) \vee Q) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee Q))$	MP with 40, 45
47	$(\neg(Q \wedge P) \vee Q) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee Q)$	MP with 42, 46
48	$(P \rightarrow A) \rightarrow (\neg P \vee A)$	replace Q by A in 11
49	$(B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \vee A)$	replace P by B in 48
50	$(B \rightarrow Q) \rightarrow (\neg B \vee Q)$	replace A by Q in 49
51	$((Q \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (\neg(Q \wedge P) \vee Q)$	replace B by $Q \wedge P$ in 50
52	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((Q \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow D) \rightarrow (((Q \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow C)$	replace B by $(Q \wedge P) \rightarrow Q$ in 35
53	$(D \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee Q)) \rightarrow (((Q \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow D) \rightarrow (((Q \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee Q))$	replace C by $\neg(P \wedge Q) \vee Q$ in 52
54	$((\neg(Q \wedge P) \vee Q) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee Q)) \rightarrow (((Q \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (\neg(Q \wedge P) \vee Q)) \rightarrow (((Q \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee Q))$	replace D by $\neg(Q \wedge P) \vee Q$ in 53
55	$((Q \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (\neg(Q \wedge P) \vee Q) \rightarrow (((Q \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee Q))$	MP with 47, 54
56	$((Q \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee Q)$	MP with 51, 55
57	$(\neg P \vee A) \rightarrow (P \rightarrow A)$	replace Q by A in 12
58	$(\neg B \vee A) \rightarrow (B \rightarrow A)$	replace P by B in 57
59	$(\neg B \vee Q) \rightarrow (B \rightarrow Q)$	replace A by Q in 58
60	$(\neg(P \wedge Q) \vee Q) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow Q)$	replace B by $P \wedge Q$ in 59
61	$(D \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow Q)) \rightarrow (((Q \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow D) \rightarrow (((Q \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow Q))$	replace C by $(P \wedge Q) \rightarrow Q$ in 52

62	$((\neg(P \wedge Q) \vee Q) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow Q)) \rightarrow (((Q \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee Q)) \rightarrow (((Q \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow Q))$	replace D by $\neg(P \wedge Q) \vee Q$ in 61
63	$((Q \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee Q) \rightarrow (((Q \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow Q))$	MP with 60, 62
64	$((Q \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow Q)$	MP with 56, 63
65	$(P \wedge Q) \rightarrow Q$	MP with 5, 64

□

The conjunction is associative too (first implication):

Theorem 0.9 (hilb26).

$$(P \wedge (Q \wedge A)) \rightarrow ((P \wedge Q) \wedge A)$$

Proof.

1	$((P \vee Q) \vee A) \rightarrow (P \vee (Q \vee A))$	add sentence hilb15
2	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$	add sentence hilb7
3	$(P \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg P)$	replace Q by A in 2
4	$(B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$	replace P by B in 3
5	$(B \rightarrow (P \vee (Q \vee A))) \rightarrow (\neg(P \vee (Q \vee A)) \rightarrow \neg B)$	replace A by $P \vee (Q \vee A)$ in 4
6	$((P \vee Q) \vee A) \rightarrow (P \vee (Q \vee A)) \rightarrow (\neg(P \vee (Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A))$	replace B by $(P \vee Q) \vee A$ in 5
7	$\neg(P \vee (Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)$	MP with 1, 6
8	$P \rightarrow \neg\neg P$	add sentence hilb5
9	$B \rightarrow \neg\neg B$	replace P by B in 8
10	$(Q \vee A) \rightarrow \neg\neg(Q \vee A)$	replace B by $Q \vee A$ in 9
11	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((A \vee P) \rightarrow (A \vee Q))$	add axiom axiom4
12	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((B \vee P) \rightarrow (B \vee Q))$	replace A by B in 11
13	$(P \rightarrow C) \rightarrow ((B \vee P) \rightarrow (B \vee C))$	replace Q by C in 12
14	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((B \vee D) \rightarrow (B \vee C))$	replace P by D in 13
15	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((P \vee D) \rightarrow (P \vee C))$	replace B by P in 14
16	$(D \rightarrow \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow ((P \vee D) \rightarrow (P \vee \neg\neg(Q \vee A)))$	replace C by $\neg\neg(Q \vee A)$ in 15
17	$((Q \vee A) \rightarrow \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow ((P \vee (Q \vee A)) \rightarrow (P \vee \neg\neg(Q \vee A)))$	replace D by $Q \vee A$ in 16
18	$(P \vee (Q \vee A)) \rightarrow (P \vee \neg\neg(Q \vee A))$	MP with 10, 17
19	$(P \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg P)$	replace Q by B in 2
20	$(C \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg C)$	replace P by C in 19
21	$(C \rightarrow (P \vee \neg\neg(Q \vee A))) \rightarrow (\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg C)$	replace B by $P \vee \neg\neg(Q \vee A)$ in 20
22	$((P \vee (Q \vee A)) \rightarrow (P \vee \neg\neg(Q \vee A))) \rightarrow (\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg(P \vee (Q \vee A)))$	replace C by $P \vee (Q \vee A)$ in 21
23	$\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg(P \vee (Q \vee A))$	MP with 18, 22
24	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$	add sentence defimpl1
25	$(\neg P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$	add sentence defimpl2
26	$(C \rightarrow \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow (\neg\neg(P \vee (Q \vee A)) \rightarrow \neg C)$	replace B by $\neg(P \vee (Q \vee A))$ in 20
27	$(\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow (\neg\neg(P \vee (Q \vee A)) \rightarrow \neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)))$	replace C by $\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A))$ in 26
28	$\neg\neg(P \vee (Q \vee A)) \rightarrow \neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A))$	MP with 23, 27
29	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((\neg((P \vee Q) \vee A) \vee D) \rightarrow (\neg((P \vee Q) \vee A) \vee C))$	replace B by $\neg((P \vee Q) \vee A)$ in 14
30	$(D \rightarrow \neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A))) \rightarrow ((\neg((P \vee Q) \vee A) \vee D) \rightarrow (\neg((P \vee Q) \vee A) \vee \neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A))))$	replace C by $\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A))$ in 29

31	$(\neg(P \vee (Q \vee A)) \rightarrow \neg(P \vee \neg(Q \vee A))) \rightarrow$ $((\neg((P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow (\neg((P \vee$ $Q) \vee A) \vee \neg(P \vee \neg(Q \vee A))))$	replace D by $\neg(P \vee (Q \vee A))$ in 30
32	$(\neg((P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow (\neg((P \vee$ $Q) \vee A) \vee \neg(P \vee \neg(Q \vee A)))$	MP with 28, 31
33	$(P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P)$	add axiom axiom3
34	$(P \vee B) \rightarrow (B \vee P)$	replace Q by B in 33
35	$(C \vee B) \rightarrow (B \vee C)$	replace P by C in 34
36	$(C \vee \neg(P \vee \neg(Q \vee A))) \rightarrow (\neg(P \vee \neg(Q \vee A)) \vee C)$	replace B by $\neg(P \vee \neg(Q \vee A))$ in 35
37	$(\neg((P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee \neg(Q \vee A))) \rightarrow (\neg(P \vee$ $\neg(Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A))$	replace C by $\neg((P \vee Q) \vee A)$ in 36
38	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((A \rightarrow P) \rightarrow (A \rightarrow Q))$	add sentence hilb1
39	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((B \rightarrow P) \rightarrow (B \rightarrow Q))$	replace A by B in 38
40	$(P \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow P) \rightarrow (B \rightarrow C))$	replace Q by C in 39
41	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow C))$	replace P by D in 40
42	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((\neg((P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow$ $D) \rightarrow ((\neg((P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow C))$	replace B by $\neg((P \vee Q) \vee A) \vee$ $\neg(P \vee (Q \vee A))$ in 41
43	$(D \rightarrow (\neg(P \vee \neg(Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A))) \rightarrow$ $((\neg((P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow D) \rightarrow$ $((\neg((P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow \neg(P \vee$ $\neg(Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A)))$	replace C by $\neg(P \vee \neg(Q \vee A)) \vee$ $\neg((P \vee Q) \vee A)$ in 42
44	$((\neg((P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee \neg(Q \vee A))) \rightarrow (\neg(P \vee$ $\neg(Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A))) \rightarrow (((\neg((P \vee Q) \vee A) \vee$ $\neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow (\neg((P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee \neg(Q \vee$ $A)))) \rightarrow ((\neg((P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow$ $(\neg(P \vee \neg(Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A))))$	replace D by $\neg((P \vee Q) \vee A) \vee$ $\neg(P \vee \neg(Q \vee A))$ in 43
45	$((\neg((P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow (\neg((P \vee$ $Q) \vee A) \vee \neg(P \vee \neg(Q \vee A)))) \rightarrow ((\neg((P \vee Q) \vee$ $A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow (\neg(P \vee \neg(Q \vee A)) \vee$ $\neg((P \vee Q) \vee A)))$	MP with 37, 44
46	$(\neg((P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow (\neg(P \vee$ $\neg(Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A))$	MP with 32, 45
47	$(C \vee \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg((P \vee Q) \vee A) \vee C)$	replace B by $\neg((P \vee Q) \vee A)$ in 35
48	$(\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg((P \vee$ $Q) \vee A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A)))$	replace C by $\neg(P \vee (Q \vee A))$ in 47
49	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow$ $D) \rightarrow ((\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow C))$	replace B by $\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee$ $\neg((P \vee Q) \vee A)$ in 41
50	$(D \rightarrow (\neg(P \vee \neg(Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A))) \rightarrow$ $((\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow D) \rightarrow$ $((\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg(P \vee$ $\neg(Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A)))$	replace C by $\neg(P \vee \neg(Q \vee A)) \vee$ $\neg((P \vee Q) \vee A)$ in 49
51	$((\neg((P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow (\neg(P \vee$ $\neg(Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A))) \rightarrow (((\neg(P \vee (Q \vee$ $A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg((P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee$ $(Q \vee A)))) \rightarrow ((\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow$ $(\neg(P \vee \neg(Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A))))$	replace D by $\neg((P \vee Q) \vee A) \vee$ $\neg(P \vee (Q \vee A))$ in 50
52	$((\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg((P \vee Q) \vee$ $A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A)))) \rightarrow ((\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee \neg((P \vee$ $Q) \vee A)) \rightarrow (\neg(P \vee \neg(Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A)))$	MP with 46, 51
53	$(\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg(P \vee$ $\neg(Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A))$	MP with 48, 52

54	$(P \rightarrow B) \rightarrow (\neg P \vee B)$	
55	$(C \rightarrow B) \rightarrow (\neg C \vee B)$	replace Q by B in 24
56	$(C \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg C \vee \neg((P \vee Q) \vee A))$	replace P by C in 54
57	$(\neg(P \vee (Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A))$	replace B by $\neg((P \vee Q) \vee A)$ in 55
58	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((\neg(P \vee (Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg(P \vee (Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow C))$	replace C by $\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A)$ in 58
59	$(D \rightarrow (\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A))) \rightarrow (((\neg(P \vee (Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg(P \vee (Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A))))$	replace B by $\neg(P \vee (Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)$ in 41
60	$((\neg\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A))) \rightarrow (((\neg(P \vee (Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A))) \rightarrow ((\neg(P \vee (Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A))))$	replace D by $\neg\neg(P \vee (Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)$ in 59
61	$((\neg(P \vee (Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A))) \rightarrow ((\neg(P \vee (Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A)))$	MP with 53, 60
62	$(\neg(P \vee (Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A))$	MP with 57, 61
63	$(\neg P \vee B) \rightarrow (P \rightarrow B)$	replace Q by B in 25
64	$(\neg C \vee B) \rightarrow (C \rightarrow B)$	replace P by C in 63
65	$(\neg C \vee \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (C \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A))$	replace B by $\neg((P \vee Q) \vee A)$ in 64
66	$(\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A))$	replace C by $\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A))$ in 65
67	$(D \rightarrow (\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A))) \rightarrow (((\neg(P \vee (Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg(P \vee (Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A))))$	replace C by $\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A))$ in 58
68	$((\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A))) \rightarrow (((\neg(P \vee (Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A))) \rightarrow ((\neg(P \vee (Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A))))$	replace D by $\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)$ in 67
69	$((\neg(P \vee (Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A))) \rightarrow ((\neg(P \vee (Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)))$	MP with 66, 68
70	$(\neg(P \vee (Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A))$	MP with 62, 69
71	$\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)$	MP with 7, 70
72	$\neg\neg P \rightarrow P$	add sentence hilb6
73	$\neg\neg A \rightarrow A$	replace P by A in 72
74	$\neg\neg(P \vee Q) \rightarrow (P \vee Q)$	replace A by $P \vee Q$ in 73
75	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee D) \rightarrow (A \vee C))$	replace B by A in 14
76	$(D \rightarrow (P \vee Q)) \rightarrow ((A \vee D) \rightarrow (A \vee (P \vee Q)))$	replace C by $P \vee Q$ in 75
77	$(\neg\neg(P \vee Q) \rightarrow (P \vee Q)) \rightarrow ((A \vee \neg\neg(P \vee Q)) \rightarrow (A \vee (P \vee Q)))$	replace D by $\neg\neg(P \vee Q)$ in 76
78	$(A \vee \neg\neg(P \vee Q)) \rightarrow (A \vee (P \vee Q))$	MP with 74, 77
79	$(C \vee (P \vee Q)) \rightarrow ((P \vee Q) \vee C)$	replace B by $P \vee Q$ in 35

80	$(A \vee (P \vee Q)) \rightarrow ((P \vee Q) \vee A)$	replace C by A in 79
81	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((A \vee \neg\neg(P \vee Q)) \rightarrow D) \rightarrow ((A \vee \neg\neg(P \vee Q)) \rightarrow C))$	replace B by $A \vee \neg\neg(P \vee Q)$ in 41
82	$(D \rightarrow ((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (((A \vee \neg\neg(P \vee Q)) \rightarrow D) \rightarrow ((A \vee \neg\neg(P \vee Q)) \rightarrow ((P \vee Q) \vee A)))$	replace C by $(P \vee Q) \vee A$ in 81
83	$((A \vee (P \vee Q)) \rightarrow ((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (((A \vee \neg\neg(P \vee Q)) \rightarrow (A \vee (P \vee Q))) \rightarrow ((A \vee \neg\neg(P \vee Q)) \rightarrow ((P \vee Q) \vee A)))$	replace D by $A \vee (P \vee Q)$ in 82
84	$((A \vee \neg\neg(P \vee Q)) \rightarrow (A \vee (P \vee Q))) \rightarrow ((A \vee \neg\neg(P \vee Q)) \rightarrow ((P \vee Q) \vee A))$	MP with 80, 83
85	$(A \vee \neg\neg(P \vee Q)) \rightarrow ((P \vee Q) \vee A)$	MP with 78, 84
86	$(C \vee A) \rightarrow (A \vee C)$	replace B by A in 35
87	$(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow (A \vee \neg\neg(P \vee Q))$	replace C by $\neg\neg(P \vee Q)$ in 86
88	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow C))$	replace B by $\neg\neg(P \vee Q) \vee A$ in 41
89	$(D \rightarrow ((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (((\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow ((P \vee Q) \vee A)))$	replace C by $(P \vee Q) \vee A$ in 88
90	$((A \vee \neg\neg(P \vee Q)) \rightarrow ((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (((\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow (A \vee \neg\neg(P \vee Q))) \rightarrow ((\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow ((P \vee Q) \vee A)))$	replace D by $A \vee \neg\neg(P \vee Q)$ in 89
91	$((\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow (A \vee \neg\neg(P \vee Q))) \rightarrow ((\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow ((P \vee Q) \vee A))$	MP with 85, 90
92	$(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow ((P \vee Q) \vee A)$	MP with 87, 91
93	$(C \rightarrow ((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg((P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg C)$	replace B by $(P \vee Q) \vee A$ in 20
94	$((\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow ((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg((P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A))$	replace C by $\neg\neg(P \vee Q) \vee A$ in 93
95	$\neg((P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A)$	MP with 92, 94
96	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \vee D) \rightarrow (\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \vee C))$	replace B by $\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A))$ in 14
97	$(D \rightarrow \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A)) \rightarrow ((\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \vee D) \rightarrow (\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \vee \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A)))$	replace C by $\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A)$ in 96
98	$(\neg((P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A)) \rightarrow ((\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \vee \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A)))$	replace D by $\neg((P \vee Q) \vee A)$ in 97
99	$(\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \vee \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A))$	MP with 95, 98
100	$(\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A))$	replace C by $\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A))$ in 56
101	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow C))$	replace B by $\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)$ in 41
102	$(D \rightarrow (\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \vee \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A))) \rightarrow (((\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \vee \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A))))$	replace C by $\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \vee \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A)$ in 101
103	$((\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \vee \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A))) \rightarrow (((\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \vee \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A))) \rightarrow ((\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \vee \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A))))$	replace D by $\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \vee \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A)$ in 102

104	$((\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow$ $(\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \vee \neg((P \vee Q) \vee A))) \rightarrow$ $((\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow$ $(\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \vee \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A)))$	MP with 99, 103
105	$(\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow$ $(\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \vee \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A))$	MP with 100, 104
106	$(\neg C \vee \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (C \rightarrow \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A))$	replace B by $\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A)$ in 64
107	$(\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \vee \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A)) \rightarrow$ $(\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A))$	replace C by $\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A))$ in 106
108	$(D \rightarrow (\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A))) \rightarrow$ $((\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow D) \rightarrow$ $((\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow$ $(\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A))))$	replace C by $\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A)$ in 101
109	$((\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \vee \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A)) \rightarrow$ $(\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A))) \rightarrow$ $((\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow$ $(\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \vee \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A))) \rightarrow$ $((\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow$ $(\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A))))$	replace D by $\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A)$ in 108
110	$((\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow$ $(\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \vee \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A))) \rightarrow$ $((\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow$ $(\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A)))$	MP with 107, 109
111	$(\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow$ $(\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A))$	MP with 105, 110
112	$\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A)$	MP with 71, 111
113	$\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee B)) \rightarrow \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee B)$	replace A by B in 112
114	$\neg(P \vee \neg\neg(C \vee B)) \rightarrow \neg(\neg\neg(P \vee C) \vee B)$	replace Q by C in 113
115	$\neg(D \vee \neg\neg(C \vee B)) \rightarrow \neg(\neg\neg(D \vee C) \vee B)$	replace P by D in 114
116	$\neg(D \vee \neg\neg(C \vee \neg A)) \rightarrow \neg(\neg\neg(D \vee C) \vee \neg A)$	replace B by $\neg A$ in 115
117	$\neg(D \vee \neg\neg(\neg Q \vee \neg A)) \rightarrow \neg(\neg\neg(D \vee \neg Q) \vee \neg A)$	replace C by $\neg Q$ in 116
118	$\neg(\neg P \vee \neg\neg(\neg Q \vee \neg A)) \rightarrow \neg(\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee \neg A)$	replace D by $\neg P$ in 117
119	$(P \wedge \neg(\neg Q \vee \neg A)) \rightarrow \neg(\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee \neg A)$	reverse abbreviation and in 118 at occurrence 1
120	$(P \wedge (Q \wedge A)) \rightarrow \neg(\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee \neg A)$	reverse abbreviation and in 119 at occurrence 1
121	$(P \wedge (Q \wedge A)) \rightarrow (\neg(\neg P \vee \neg Q) \wedge A)$	reverse abbreviation and in 120 at occurrence 1
122	$(P \wedge (Q \wedge A)) \rightarrow ((P \wedge Q) \wedge A)$	reverse abbreviation and in 121 at occurrence 1

□

The conjunction is associative (second implication):

Theorem 0.10 (hilb27).

$$((P \wedge Q) \wedge A) \rightarrow (P \wedge (Q \wedge A))$$

Proof.

1	$(P \vee (Q \vee A)) \rightarrow ((P \vee Q) \vee A)$	add sentence hilb14
2	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$	add sentence hilb7

3	$(P \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg P)$	
4	$(B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$	replace Q by A in 2
5	$(B \rightarrow ((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg((P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg B)$	replace P by B in 3
6	$((P \vee (Q \vee A)) \rightarrow ((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg((P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg(P \vee (Q \vee A)))$	replace A by $(P \vee Q) \vee A$ in 4
7	$\neg((P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg(P \vee (Q \vee A))$	replace B by $P \vee (Q \vee A)$ in 5
8	$P \rightarrow \neg\neg P$	MP with 1, 6
9	$A \rightarrow \neg\neg A$	add sentence hilb5
10	$(P \vee Q) \rightarrow \neg\neg(P \vee Q)$	replace P by A in 8
11	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((A \vee P) \rightarrow (A \vee Q))$	replace A by $P \vee Q$ in 9
12	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((B \vee P) \rightarrow (B \vee Q))$	add axiom axiom4
13	$(P \rightarrow C) \rightarrow ((B \vee P) \rightarrow (B \vee C))$	replace A by B in 11
14	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((B \vee D) \rightarrow (B \vee C))$	replace Q by C in 12
15	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee D) \rightarrow (A \vee C))$	replace P by D in 13
16	$(D \rightarrow \neg\neg(P \vee Q)) \rightarrow ((A \vee D) \rightarrow (A \vee \neg\neg(P \vee Q)))$	replace B by A in 14
17	$((P \vee Q) \rightarrow \neg\neg(P \vee Q)) \rightarrow ((A \vee (P \vee Q)) \rightarrow (A \vee \neg\neg(P \vee Q)))$	replace C by $\neg\neg(P \vee Q)$ in 15
18	$(A \vee (P \vee Q)) \rightarrow (A \vee \neg\neg(P \vee Q))$	replace D by $P \vee Q$ in 16
19	$(P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P)$	MP with 10, 17
20	$(P \vee B) \rightarrow (B \vee P)$	add axiom axiom3
21	$(C \vee B) \rightarrow (B \vee C)$	replace Q by B in 19
22	$(C \vee \neg\neg(P \vee Q)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee C)$	replace P by C in 20
23	$(A \vee \neg\neg(P \vee Q)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee A)$	replace B by $\neg\neg(P \vee Q)$ in 21
24	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((A \rightarrow P) \rightarrow (A \rightarrow Q))$	replace C by A in 22
25	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((B \rightarrow P) \rightarrow (B \rightarrow Q))$	add sentence hilb1
26	$(P \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow P) \rightarrow (B \rightarrow C))$	replace A by B in 24
27	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow C))$	replace Q by C in 25
28	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((A \vee (P \vee Q)) \rightarrow D) \rightarrow ((A \vee (P \vee Q)) \rightarrow C))$	replace P by D in 26
29	$(D \rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (((A \vee (P \vee Q)) \rightarrow D) \rightarrow ((A \vee (P \vee Q)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee A)))$	replace B by $A \vee (P \vee Q)$ in 27
30	$((A \vee \neg\neg(P \vee Q)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (((A \vee (P \vee Q)) \rightarrow (A \vee \neg\neg(P \vee Q))) \rightarrow ((A \vee (P \vee Q)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee A)))$	replace C by $\neg\neg(P \vee Q) \vee A$ in 28
31	$((A \vee (P \vee Q)) \rightarrow (A \vee \neg\neg(P \vee Q))) \rightarrow ((A \vee (P \vee Q)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee A))$	replace D by $A \vee \neg\neg(P \vee Q)$ in 29
32	$(A \vee (P \vee Q)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee A)$	MP with 23, 30
33	$(C \vee A) \rightarrow (A \vee C)$	MP with 18, 31
34	$((P \vee Q) \vee A) \rightarrow (A \vee (P \vee Q))$	replace B by A in 21
35	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((P \vee Q) \vee A) \rightarrow D) \rightarrow (((P \vee Q) \vee A) \rightarrow C)$	replace C by $P \vee Q$ in 33
36	$(D \rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (((P \vee Q) \vee A) \rightarrow D) \rightarrow (((P \vee Q) \vee A) \rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee A))$	replace B by $(P \vee Q) \vee A$ in 27
37	$((A \vee (P \vee Q)) \rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (((P \vee Q) \vee A) \rightarrow (A \vee (P \vee Q))) \rightarrow (((P \vee Q) \vee A) \rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee A))$	replace C by $\neg\neg(P \vee Q) \vee A$ in 35
38	$((P \vee Q) \vee A) \rightarrow (A \vee (P \vee Q)) \rightarrow (((P \vee Q) \vee A) \rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee A))$	replace D by $A \vee (P \vee Q)$ in 36
39	$((P \vee Q) \vee A) \rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee A)$	MP with 32, 37
40	$(P \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg P)$	MP with 34, 38
41	$(C \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg C)$	replace Q by B in 2
42	$(C \rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg C)$	replace P by C in 40
		replace B by $\neg\neg(P \vee Q) \vee A$ in 41

43	$((P \vee Q) \vee A) \rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow (\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A))$	replace C by $(P \vee Q) \vee A$ in 42
44	$\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)$	MP with 39, 43
45	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$	add sentence defimpl1
46	$(\neg P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$	add sentence defimpl2
47	$(C \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg\neg((P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg C)$	replace B by $\neg((P \vee Q) \vee A)$ in 41
48	$(\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg\neg((P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A))$	replace C by $\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A)$ in 47
49	$\neg\neg((P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A)$	MP with 44, 48
50	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee D) \rightarrow (\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee C))$	replace B by $\neg(P \vee (Q \vee A))$ in 14
51	$(D \rightarrow \neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A)) \rightarrow ((\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee D) \rightarrow (\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee \neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A)))$	replace C by $\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A)$ in 50
52	$(\neg\neg((P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A)) \rightarrow ((\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee \neg\neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee \neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A)))$	replace D by $\neg\neg((P \vee Q) \vee A)$ in 51
53	$(\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee \neg\neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee \neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A))$	MP with 49, 52
54	$(C \vee \neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \vee C)$	replace B by $\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A)$ in 21
55	$(\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee \neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A)))$	replace C by $\neg(P \vee (Q \vee A))$ in 54
56	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee \neg\neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee \neg\neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow C))$	replace B by $\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee \neg\neg((P \vee Q) \vee A)$ in 27
57	$(D \rightarrow (\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A)))) \rightarrow (((\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee \neg\neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee \neg\neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A))))$	replace C by $\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A))$ in 56
58	$((\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee \neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A)))) \rightarrow (((\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee \neg\neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee \neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A))) \rightarrow ((\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee \neg\neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A))))$	replace D by $\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee \neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A)$ in 57
59	$((\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee \neg\neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee \neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A))) \rightarrow ((\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee \neg\neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A))))$	MP with 55, 58
60	$(\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee \neg\neg((P \vee Q) \vee A)) \rightarrow (\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A)))$	MP with 53, 59
61	$(C \vee \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow (\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee C)$	replace B by $\neg(P \vee (Q \vee A))$ in 21
62	$(\neg\neg((P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow (\neg(P \vee (Q \vee A)) \vee \neg\neg((P \vee Q) \vee A))$	replace C by $\neg\neg((P \vee Q) \vee A)$ in 61
63	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((\neg\neg((P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg\neg((P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow C))$	replace B by $\neg\neg((P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A))$ in 27
64	$(D \rightarrow (\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A)))) \rightarrow (((\neg\neg((P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg\neg((P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow (\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A))))$	replace C by $\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A))$ in 63

86	$\neg\neg P \rightarrow P$	
87	$\neg\neg B \rightarrow B$	
88	$\neg\neg(Q \vee A) \rightarrow (Q \vee A)$	add sentence hilb6
89	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((P \vee D) \rightarrow (P \vee C))$	replace P by B in 86
90	$(D \rightarrow (Q \vee A)) \rightarrow ((P \vee D) \rightarrow (P \vee (Q \vee A)))$	replace B by $Q \vee A$ in 87
91	$(\neg\neg(Q \vee A) \rightarrow (Q \vee A)) \rightarrow ((P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow (P \vee (Q \vee A)))$	replace B by P in 14
92	$(P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow (P \vee (Q \vee A))$	replace C by $Q \vee A$ in 89
93	$(C \rightarrow (P \vee (Q \vee A))) \rightarrow (\neg(P \vee (Q \vee A)) \rightarrow \neg C)$	replace D by $\neg\neg(Q \vee A)$ in 90
94	$((P \vee \neg\neg(Q \vee A)) \rightarrow (P \vee (Q \vee A))) \rightarrow (\neg(P \vee (Q \vee A)) \rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)))$	MP with 88, 91
95	$\neg(P \vee (Q \vee A)) \rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A))$	replace B by $P \vee (Q \vee A)$ in 41
96	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \vee D) \rightarrow (\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \vee C))$	replace C by $P \vee \neg\neg(Q \vee A)$ in 93
97	$(D \rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A))) \rightarrow ((\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \vee D) \rightarrow (\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A))))$	MP with 92, 94
98	$(\neg(P \vee (Q \vee A)) \rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A))) \rightarrow ((\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow (\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A))))$	replace B by $\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A)$ in 14
99	$(\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow (\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)))$	replace C by $\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A))$ in 96
100	$(\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow (\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A)))$	replace D by $\neg(P \vee (Q \vee A))$ in 97
101	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A)) \rightarrow \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow C)$	MP with 95, 98
102	$(D \rightarrow (\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)))) \rightarrow (((\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow (\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A))))$	replace C by $\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A)$ in 70
103	$((\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow (\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)))) \rightarrow (((\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow (\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow ((\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow (\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A))))$	replace B by $\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A)$ in 27
104	$((\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow (\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee (Q \vee A)))) \rightarrow ((\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow (\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A))))$	replace C by $\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A)$ in 101
105	$(\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow (\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)))$	replace D by $\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A)$ in 102
106	$(\neg C \vee \neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A))) \rightarrow (C \rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)))$	MP with 99, 103
107	$(\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A))) \rightarrow (\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)))$	MP with 100, 104
108	$(D \rightarrow (\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A)))) \rightarrow (((\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow (\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A))))$	replace B by $\neg(P \vee \neg\neg(Q \vee A))$ in 78

109	$\begin{aligned} & ((\neg(\neg(\neg(P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee \neg(Q \vee A)))) \rightarrow \\ & (\neg(\neg(\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg(P \vee \neg(Q \vee A)))) \rightarrow \\ & (((\neg(\neg(\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow \\ & (\neg(\neg(\neg(P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee \neg(Q \vee A)))) \rightarrow \\ & ((\neg(\neg(\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow \\ & (\neg(\neg(\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg(P \vee \neg(Q \vee A)))))) \end{aligned}$	replace D by $\neg(\neg(\neg(P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee \neg(Q \vee A)))$ in 108
110	$\begin{aligned} & ((\neg(\neg(\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow \\ & (\neg(\neg(\neg(P \vee Q) \vee A) \vee \neg(P \vee \neg(Q \vee A)))) \rightarrow \\ & ((\neg(\neg(\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow \\ & (\neg(\neg(\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg(P \vee \neg(Q \vee A)))))) \end{aligned}$	MP with 107, 109
111	$\begin{aligned} & (\neg(\neg(\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg(P \vee (Q \vee A))) \rightarrow \\ & (\neg(\neg(\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg(P \vee \neg(Q \vee A)))) \end{aligned}$	MP with 105, 110
112	$\neg(\neg(\neg(P \vee Q) \vee A) \rightarrow \neg(P \vee \neg(Q \vee A)))$	MP with 85, 111
113	$\neg(\neg(\neg(P \vee Q) \vee B) \rightarrow \neg(P \vee \neg(Q \vee B)))$	replace A by B in 112
114	$\neg(\neg(\neg(P \vee C) \vee B) \rightarrow \neg(P \vee \neg(C \vee B)))$	replace Q by C in 113
115	$\neg(\neg(\neg(D \vee C) \vee B) \rightarrow \neg(D \vee \neg(C \vee B)))$	replace P by D in 114
116	$\neg(\neg(\neg(D \vee C) \vee \neg A) \rightarrow \neg(D \vee \neg(C \vee \neg A)))$	replace B by $\neg A$ in 115
117	$\neg(\neg(\neg(D \vee \neg Q) \vee \neg A) \rightarrow \neg(D \vee \neg(\neg Q \vee \neg A)))$	replace C by $\neg Q$ in 116
118	$\neg(\neg(\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee \neg A) \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg(\neg Q \vee \neg A)))$	replace D by $\neg P$ in 117
119	$(\neg(\neg P \vee \neg Q) \wedge A) \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg(\neg Q \vee \neg A))$	reverse abbreviation and in 118 at occurrence 1
120	$((P \wedge Q) \wedge A) \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg(\neg Q \vee \neg A))$	reverse abbreviation and in 119 at occurrence 1
121	$((P \wedge Q) \wedge A) \rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \vee \neg A))$	reverse abbreviation and in 120 at occurrence 1
122	$((P \wedge Q) \wedge A) \rightarrow (P \wedge (Q \wedge A))$	reverse abbreviation and in 121 at occurrence 1

□

Form for the conjunction rule:

Theorem 0.11 (hilb28).

$$P \rightarrow (Q \rightarrow (P \wedge Q))$$

Proof.

1	$P \vee \neg P$	add sentence hilb4
2	$(\neg P \vee \neg Q) \vee \neg(\neg P \vee \neg Q)$	replace P by $\neg P \vee \neg Q$ in 1
3	$((P \vee Q) \vee A) \rightarrow (P \vee (Q \vee A))$	add sentence hilb15
4	$((P \vee Q) \vee B) \rightarrow (P \vee (Q \vee B))$	replace A by B in 3
5	$((P \vee C) \vee B) \rightarrow (P \vee (C \vee B))$	replace Q by C in 4
6	$((D \vee C) \vee B) \rightarrow (D \vee (C \vee B))$	replace P by D in 5
7	$((D \vee C) \vee \neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow (D \vee (C \vee \neg(\neg P \vee \neg Q)))$	replace B by $\neg(\neg P \vee \neg Q)$ in 6
8	$((D \vee \neg Q) \vee \neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow (D \vee (\neg Q \vee \neg(\neg P \vee \neg Q)))$	replace C by $\neg Q$ in 7
9	$((\neg P \vee \neg Q) \vee \neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow (\neg P \vee (\neg Q \vee \neg(\neg P \vee \neg Q)))$	replace D by $\neg P$ in 8
10	$\neg P \vee (\neg Q \vee \neg(\neg P \vee \neg Q))$	MP with 2, 9
11	$P \rightarrow (\neg Q \vee \neg(\neg P \vee \neg Q))$	reverse abbreviation impl in 10 at occurrence 1
12	$P \rightarrow (Q \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q))$	reverse abbreviation impl in 11 at occurrence 1
13	$P \rightarrow (Q \rightarrow (P \wedge Q))$	reverse abbreviation and in 12 at occurrence 1

□

Preconditions could be put together in a conjunction (first direction):

Theorem 0.12 (hilb29).

$$(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow A)$$

Proof.

1	$P \rightarrow P$	add sentence hilb2
2	$Q \rightarrow Q$	replace P by Q in 1
3	$(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A))$	replace Q by $P \rightarrow (Q \rightarrow A)$ in 2
4	$(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow (\neg P \vee (Q \rightarrow A))$	use abbreviation impl in 3 at occurrence 4
5	$(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow (\neg P \vee (\neg Q \vee A))$	use abbreviation impl in 4 at occurrence 4
6	$(P \vee (Q \vee A)) \rightarrow ((P \vee Q) \vee A)$	add sentence hilb14
7	$(P \vee (Q \vee B)) \rightarrow ((P \vee Q) \vee B)$	replace A by B in 6
8	$(P \vee (C \vee B)) \rightarrow ((P \vee C) \vee B)$	replace Q by C in 7
9	$(D \vee (C \vee B)) \rightarrow ((D \vee C) \vee B)$	replace P by D in 8
10	$(D \vee (C \vee A)) \rightarrow ((D \vee C) \vee A)$	replace B by A in 9
11	$(D \vee (\neg Q \vee A)) \rightarrow ((D \vee \neg Q) \vee A)$	replace C by $\neg Q$ in 10
12	$(\neg P \vee (\neg Q \vee A)) \rightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee A)$	replace D by $\neg P$ in 11
13	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$	add sentence defimpl1
14	$(\neg P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$	add sentence defimpl2
15	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((A \vee P) \rightarrow (A \vee Q))$	add axiom axiom4
16	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((B \vee P) \rightarrow (B \vee Q))$	replace A by B in 15
17	$(P \rightarrow C) \rightarrow ((B \vee P) \rightarrow (B \vee C))$	replace Q by C in 16
18	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((B \vee D) \rightarrow (B \vee C))$	replace P by D in 17
19	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee D) \rightarrow (\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee C))$	replace B by $\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow A))$ in 18
20	$(D \rightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee A)) \rightarrow ((\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee D) \rightarrow (\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee ((\neg P \vee \neg Q) \vee A)))$	replace C by $(\neg P \vee \neg Q) \vee A$ in 19
21	$((\neg P \vee (\neg Q \vee A)) \rightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee A)) \rightarrow ((\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee (\neg P \vee (\neg Q \vee A))) \rightarrow (\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee ((\neg P \vee \neg Q) \vee A)))$	replace D by $\neg P \vee (\neg Q \vee A)$ in 20
22	$(\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee (\neg P \vee (\neg Q \vee A))) \rightarrow (\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee ((\neg P \vee \neg Q) \vee A))$	MP with 12, 21
23	$(P \rightarrow B) \rightarrow (\neg P \vee B)$	replace Q by B in 13
24	$(C \rightarrow B) \rightarrow (\neg C \vee B)$	replace P by C in 23
25	$(C \rightarrow (\neg P \vee (\neg Q \vee A))) \rightarrow (\neg C \vee (\neg P \vee (\neg Q \vee A)))$	replace B by $\neg P \vee (\neg Q \vee A)$ in 24
26	$((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow (\neg P \vee (\neg Q \vee A))) \rightarrow (\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee (\neg P \vee (\neg Q \vee A)))$	replace C by $P \rightarrow (Q \rightarrow A)$ in 25
27	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((A \rightarrow P) \rightarrow (A \rightarrow Q))$	add sentence hilb1
28	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((B \rightarrow P) \rightarrow (B \rightarrow Q))$	replace A by B in 27
29	$(P \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow P) \rightarrow (B \rightarrow C))$	replace Q by C in 28
30	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow C))$	replace P by D in 29
31	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow (\neg P \vee (\neg Q \vee A))) \rightarrow D) \rightarrow (((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow (\neg P \vee (\neg Q \vee A))) \rightarrow C)$	replace B by $(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow (\neg P \vee (\neg Q \vee A))$ in 30

32	$(D \rightarrow (\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee ((\neg P \vee \neg Q) \vee A))) \rightarrow$ $((((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow (\neg P \vee (\neg Q \vee A))) \rightarrow D) \rightarrow$ $((((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow (\neg P \vee (\neg Q \vee A))) \rightarrow (\neg(P \rightarrow$ $(Q \rightarrow A)) \vee ((\neg P \vee \neg Q) \vee A))))$	replace C by $\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee$ $((\neg P \vee \neg Q) \vee A)$ in 31
33	$((\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee (\neg P \vee (\neg Q \vee A))) \rightarrow (\neg(P \rightarrow$ $(Q \rightarrow A)) \vee ((\neg P \vee \neg Q) \vee A))) \rightarrow (((P \rightarrow$ $(Q \rightarrow A)) \rightarrow (\neg P \vee (\neg Q \vee A))) \rightarrow (\neg(P \rightarrow$ $(Q \rightarrow A)) \vee (\neg P \vee (\neg Q \vee A))) \rightarrow (((P \rightarrow (Q \rightarrow$ $A)) \rightarrow (\neg P \vee (\neg Q \vee A))) \rightarrow (\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow$ $A)) \vee ((\neg P \vee \neg Q) \vee A))))$	replace D by $\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee$ $(\neg P \vee (\neg Q \vee A))$ in 32
34	$((((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow (\neg P \vee (\neg Q \vee A))) \rightarrow (\neg(P \rightarrow$ $(Q \rightarrow A)) \vee (\neg P \vee (\neg Q \vee A)))) \rightarrow (((P \rightarrow (Q \rightarrow$ $A)) \rightarrow (\neg P \vee (\neg Q \vee A))) \rightarrow (\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow$ $A)) \vee ((\neg P \vee \neg Q) \vee A)))$	MP with 22, 33
35	$((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow (\neg P \vee (\neg Q \vee A))) \rightarrow (\neg(P \rightarrow$ $(Q \rightarrow A)) \vee ((\neg P \vee \neg Q) \vee A))$	MP with 26, 34
36	$(\neg P \vee B) \rightarrow (P \rightarrow B)$	replace Q by B in 14
37	$(\neg C \vee B) \rightarrow (C \rightarrow B)$	replace P by C in 36
38	$(\neg C \vee ((\neg P \vee \neg Q) \vee A)) \rightarrow (C \rightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee A))$	replace B by $(\neg P \vee \neg Q) \vee A$ in 37
39	$(\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee ((\neg P \vee \neg Q) \vee A)) \rightarrow ((P \rightarrow$ $(Q \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee A))$	replace C by $P \rightarrow (Q \rightarrow A)$ in 38
40	$(D \rightarrow ((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee A))) \rightarrow$ $((((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow (\neg P \vee (\neg Q \vee A))) \rightarrow D) \rightarrow$ $((((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow (\neg P \vee (\neg Q \vee A))) \rightarrow ((P \rightarrow$ $(Q \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee A))))$	replace C by $(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow$ $((\neg P \vee \neg Q) \vee A)$ in 31
41	$((\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee ((\neg P \vee \neg Q) \vee A)) \rightarrow ((P \rightarrow$ $(Q \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee A))) \rightarrow (((P \rightarrow$ $(Q \rightarrow A)) \rightarrow (\neg P \vee (\neg Q \vee A))) \rightarrow (\neg(P \rightarrow$ $(Q \rightarrow A)) \vee ((\neg P \vee \neg Q) \vee A))) \rightarrow (((P \rightarrow (Q \rightarrow$ $A)) \rightarrow (\neg P \vee (\neg Q \vee A))) \rightarrow ((P \rightarrow (Q \rightarrow$ $A)) \rightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee A)))$	replace D by $\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee$ $((\neg P \vee \neg Q) \vee A)$ in 40
42	$((((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow (\neg P \vee (\neg Q \vee A))) \rightarrow (\neg(P \rightarrow$ $(Q \rightarrow A)) \vee ((\neg P \vee \neg Q) \vee A))) \rightarrow (((P \rightarrow (Q \rightarrow$ $A)) \rightarrow (\neg P \vee (\neg Q \vee A))) \rightarrow ((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow$ $((\neg P \vee \neg Q) \vee A)))$	MP with 39, 41
43	$((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow (\neg P \vee (\neg Q \vee A))) \rightarrow ((P \rightarrow$ $(Q \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee A))$	MP with 35, 42
44	$(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee A)$	MP with 5, 43
45	$P \rightarrow \neg\neg P$	add sentence hilb5
46	$A \rightarrow \neg\neg A$	replace P by A in 45
47	$(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow \neg\neg(\neg P \vee \neg Q)$	replace A by $\neg P \vee \neg Q$ in 46
48	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee D) \rightarrow (A \vee C))$	replace B by A in 18
49	$(D \rightarrow \neg\neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow ((A \vee D) \rightarrow (A \vee \neg\neg(\neg P \vee$ $\neg Q)))$	replace C by $\neg\neg(\neg P \vee \neg Q)$ in 48
50	$((\neg P \vee \neg Q) \rightarrow \neg\neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow ((A \vee (\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow$ $(A \vee \neg\neg(\neg P \vee \neg Q)))$	replace D by $\neg P \vee \neg Q$ in 49
51	$(A \vee (\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow (A \vee \neg\neg(\neg P \vee \neg Q))$	MP with 47, 50
52	$(P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P)$	add axiom axiom3
53	$(P \vee B) \rightarrow (B \vee P)$	replace Q by B in 52
54	$(C \vee B) \rightarrow (B \vee C)$	replace P by C in 53
55	$(C \vee \neg\neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow (\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee C)$	replace B by $\neg\neg(\neg P \vee \neg Q)$ in 54
56	$(A \vee \neg\neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow (\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A)$	replace C by A in 55

79	$(\neg C \vee (\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A)) \rightarrow (C \rightarrow (\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A))$	replace B by $\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A$ in 37
80	$(\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee (\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A)) \rightarrow ((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow (\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A))$	replace C by $P \rightarrow (Q \rightarrow A)$ in 79
81	$(D \rightarrow ((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow (\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A))) \rightarrow (((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee A)) \rightarrow D) \rightarrow (((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee A)) \rightarrow ((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow (\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A))))$	replace C by $(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow (\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A)$ in 74
82	$((\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee (\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A)) \rightarrow ((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow (\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A))) \rightarrow (((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee A)) \rightarrow (\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee (\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A))) \rightarrow (((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee A)) \rightarrow ((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow (\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A))))$	replace D by $\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee (\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A)$ in 81
83	$((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee A)) \rightarrow (\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee (\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A)) \rightarrow (((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee A)) \rightarrow ((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow (\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A)))$	MP with 80, 82
84	$((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee A)) \rightarrow ((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow (\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A))$	MP with 78, 83
85	$(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow (\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A)$	MP with 44, 84
86	$(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow (\neg(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow A)$	reverse abbreviation impl in 85 at occurrence 1
87	$(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow A)$	reverse abbreviation and in 86 at occurrence 1

□

Preconditions could be put together in a conjunction (second direction):

Theorem 0.13 (hilb30).

$$((P \wedge Q) \rightarrow A) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A))$$

Proof.

1	$P \rightarrow P$	add sentence hilb2
2	$Q \rightarrow Q$	replace P by Q in 1
3	$(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A))$	replace Q by $P \rightarrow (Q \rightarrow A)$ in 2
4	$(\neg P \vee (Q \rightarrow A)) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A))$	use abbreviation impl in 3 at occurrence 2
5	$(\neg P \vee (\neg Q \vee A)) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A))$	use abbreviation impl in 4 at occurrence 2
6	$((P \vee Q) \vee A) \rightarrow (P \vee (Q \vee A))$	add sentence hilb15
7	$((P \vee Q) \vee B) \rightarrow (P \vee (Q \vee B))$	replace A by B in 6
8	$((P \vee C) \vee B) \rightarrow (P \vee (C \vee B))$	replace Q by C in 7
9	$((D \vee C) \vee B) \rightarrow (D \vee (C \vee B))$	replace P by D in 8
10	$((D \vee C) \vee A) \rightarrow (D \vee (C \vee A))$	replace B by A in 9
11	$((D \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (D \vee (\neg Q \vee A))$	replace C by $\neg Q$ in 10
12	$((\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (\neg P \vee (\neg Q \vee A))$	replace D by $\neg P$ in 11
13	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$	add sentence defimpl1
14	$(\neg P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$	add sentence defimpl2
15	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$	add sentence hilb7

16	$(P \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg P)$	
17	$(C \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg C)$	replace Q by B in 15
18	$(C \rightarrow (\neg P \vee (\neg Q \vee A))) \rightarrow (\neg(\neg P \vee (\neg Q \vee A)) \rightarrow \neg C)$	replace P by C in 16
19	$((\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (\neg P \vee (\neg Q \vee A))) \rightarrow$ $(\neg(\neg P \vee (\neg Q \vee A)) \rightarrow \neg((\neg P \vee \neg Q) \vee A))$	replace B by $\neg P \vee (\neg Q \vee A)$ in 17
20	$\neg(\neg P \vee (\neg Q \vee A)) \rightarrow \neg((\neg P \vee \neg Q) \vee A)$	replace C by $(\neg P \vee \neg Q) \vee A$ in 18
21	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((A \vee P) \rightarrow (A \vee Q))$	MP with 12, 19
22	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((B \vee P) \rightarrow (B \vee Q))$	add axiom axiom4
23	$(P \rightarrow C) \rightarrow ((B \vee P) \rightarrow (B \vee C))$	replace A by B in 21
24	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((B \vee D) \rightarrow (B \vee C))$	replace Q by C in 22
25	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee D) \rightarrow ((P \rightarrow$ $(Q \rightarrow A)) \vee C))$	replace P by D in 23
26	$(D \rightarrow \neg((\neg P \vee \neg Q) \vee A)) \rightarrow (((P \rightarrow (Q \rightarrow$ $A)) \vee D) \rightarrow ((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee \neg((\neg P \vee \neg Q) \vee A)))$	replace B by $P \rightarrow (Q \rightarrow A)$ in 24
27	$(\neg(\neg P \vee (\neg Q \vee A)) \rightarrow \neg((\neg P \vee \neg Q) \vee A)) \rightarrow$ $((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee \neg(\neg P \vee (\neg Q \vee A))) \rightarrow ((P \rightarrow$ $(Q \rightarrow A)) \vee \neg((\neg P \vee \neg Q) \vee A))$	replace C by $\neg((\neg P \vee \neg Q) \vee A)$ in 25
28	$((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee \neg(\neg P \vee (\neg Q \vee A))) \rightarrow ((P \rightarrow$ $(Q \rightarrow A)) \vee \neg((\neg P \vee \neg Q) \vee A))$	replace D by $\neg(\neg P \vee (\neg Q \vee A))$ in 26
29	$(P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P)$	MP with 20, 27
30	$(P \vee B) \rightarrow (B \vee P)$	
31	$(C \vee B) \rightarrow (B \vee C)$	add axiom axiom3
32	$(C \vee \neg((\neg P \vee \neg Q) \vee A)) \rightarrow (\neg((\neg P \vee \neg Q) \vee A) \vee C)$	replace Q by B in 29
33	$((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee \neg((\neg P \vee \neg Q) \vee A)) \rightarrow$ $(\neg((\neg P \vee \neg Q) \vee A) \vee (P \rightarrow (Q \rightarrow A)))$	replace P by C in 30
34	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((A \rightarrow P) \rightarrow (A \rightarrow Q))$	replace B by $\neg((\neg P \vee \neg Q) \vee A)$ in 31
35	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((B \rightarrow P) \rightarrow (B \rightarrow Q))$	replace C by $P \rightarrow (Q \rightarrow A)$ in 32
36	$(P \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow P) \rightarrow (B \rightarrow C))$	
37	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow C))$	add sentence hilb1
38	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee \neg(\neg P \vee (\neg Q \vee$ $A))) \rightarrow D) \rightarrow (((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee \neg(\neg P \vee (\neg Q \vee$ $A))) \rightarrow C)$	replace A by B in 34
39	$(D \rightarrow (\neg((\neg P \vee \neg Q) \vee A) \vee (P \rightarrow (Q \rightarrow A)))) \rightarrow$ $((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee \neg(\neg P \vee (\neg Q \vee A))) \rightarrow$ $D) \rightarrow (((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee \neg(\neg P \vee (\neg Q \vee A))) \rightarrow$ $(\neg((\neg P \vee \neg Q) \vee A) \vee (P \rightarrow (Q \rightarrow A))))$	replace Q by C in 35
40	$((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee \neg((\neg P \vee \neg Q) \vee A)) \rightarrow$ $(\neg((\neg P \vee \neg Q) \vee A) \vee (P \rightarrow (Q \rightarrow A))) \rightarrow$ $((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee \neg(\neg P \vee (\neg Q \vee A))) \rightarrow ((P \rightarrow$ $(Q \rightarrow A)) \vee \neg((\neg P \vee \neg Q) \vee A)) \rightarrow (((P \rightarrow (Q \rightarrow$ $A)) \vee \neg(\neg P \vee (\neg Q \vee A))) \rightarrow (\neg((\neg P \vee \neg Q) \vee A) \vee (P \rightarrow$ $(Q \rightarrow A))))$	replace P by D in 36
41	$((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee \neg(\neg P \vee (\neg Q \vee A))) \rightarrow ((P \rightarrow$ $(Q \rightarrow A)) \vee \neg((\neg P \vee \neg Q) \vee A)) \rightarrow (((P \rightarrow (Q \rightarrow$ $A)) \vee \neg(\neg P \vee (\neg Q \vee A))) \rightarrow (\neg((\neg P \vee \neg Q) \vee A) \vee (P \rightarrow$ $(Q \rightarrow A))))$	replace B by $(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee \neg(\neg P \vee (\neg Q \vee A))$ in 37
42	$((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee \neg(\neg P \vee (\neg Q \vee A))) \rightarrow$ $(\neg((\neg P \vee \neg Q) \vee A) \vee (P \rightarrow (Q \rightarrow A)))$	replace C by $\neg((\neg P \vee \neg Q) \vee A) \vee (P \rightarrow (Q \rightarrow A))$ in 38
43	$(C \vee (P \rightarrow (Q \rightarrow A))) \rightarrow ((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee C)$	replace D by $(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee \neg((\neg P \vee \neg Q) \vee A)$ in 39
44	$(\neg(\neg P \vee (\neg Q \vee A)) \vee (P \rightarrow (Q \rightarrow A))) \rightarrow ((P \rightarrow$ $(Q \rightarrow A)) \vee \neg(\neg P \vee (\neg Q \vee A)))$	MP with 33, 40

64	$((\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \vee (P \rightarrow (Q \rightarrow A))) \rightarrow$ $((\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A))) \rightarrow$ $((\neg(\neg P \vee (\neg Q \vee A)) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A))) \rightarrow$ $(\neg(\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \vee (P \rightarrow (Q \rightarrow A)))) \rightarrow$ $((\neg(\neg P \vee (\neg Q \vee A)) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A))) \rightarrow$ $((\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A))))$	replace D by $\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A$ \vee $(P \rightarrow (Q \rightarrow A))$ in 63
65	$((\neg(\neg P \vee (\neg Q \vee A)) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A))) \rightarrow$ $(\neg(\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \vee (P \rightarrow (Q \rightarrow A)))) \rightarrow$ $((\neg(\neg P \vee (\neg Q \vee A)) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A))) \rightarrow$ $((\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A))))$	MP with 62, 64
66	$((\neg P \vee (\neg Q \vee A)) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A))) \rightarrow$ $((\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A)))$	MP with 58, 65
67	$((\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A))$	MP with 5, 66
68	$\neg\neg P \rightarrow P$	add sentence hilb6
69	$\neg\neg A \rightarrow A$	replace P by A in 68
70	$\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (\neg P \vee \neg Q)$	replace A by $\neg P \vee \neg Q$ in 69
71	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee D) \rightarrow (A \vee C))$	replace B by A in 24
72	$(D \rightarrow (\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow ((A \vee D) \rightarrow (A \vee (\neg P \vee \neg Q)))$	replace C by $\neg P \vee \neg Q$ in 71
73	$(\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow ((A \vee \neg\neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow (A \vee (\neg P \vee \neg Q)))$	replace D by $\neg\neg(\neg P \vee \neg Q)$ in 72
74	$(A \vee \neg\neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow (A \vee (\neg P \vee \neg Q))$	MP with 70, 73
75	$(C \vee (\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee C)$	replace B by $\neg P \vee \neg Q$ in 31
76	$(A \vee (\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee A)$	replace C by A in 75
77	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((A \vee \neg\neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow D) \rightarrow ((A \vee \neg\neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow C))$	replace B by $A \vee \neg\neg(\neg P \vee \neg Q)$ in 37
78	$(D \rightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee A)) \rightarrow (((A \vee \neg\neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow D) \rightarrow ((A \vee \neg\neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee A)))$	replace C by $(\neg P \vee \neg Q) \vee A$ in 77
79	$((A \vee (\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee A)) \rightarrow (((A \vee \neg\neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow (A \vee (\neg P \vee \neg Q))) \rightarrow ((A \vee \neg\neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee A)))$	replace D by $A \vee (\neg P \vee \neg Q)$ in 78
80	$((A \vee \neg\neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow (A \vee (\neg P \vee \neg Q))) \rightarrow ((A \vee \neg\neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee A))$	MP with 76, 79
81	$(A \vee \neg\neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee A)$	MP with 74, 80
82	$(C \vee A) \rightarrow (A \vee C)$	replace B by A in 31
83	$(\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (A \vee \neg\neg(\neg P \vee \neg Q))$	replace C by $\neg\neg(\neg P \vee \neg Q)$ in 82
84	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow C))$	replace B by $\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A$ in 37
85	$(D \rightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee A)) \rightarrow (((\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee A)))$	replace C by $(\neg P \vee \neg Q) \vee A$ in 84
86	$((A \vee \neg\neg(\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee A)) \rightarrow (((\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (A \vee \neg\neg(\neg P \vee \neg Q))) \rightarrow ((\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee A)))$	replace D by $A \vee \neg\neg(\neg P \vee \neg Q)$ in 85
87	$((\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (A \vee \neg\neg(\neg P \vee \neg Q))) \rightarrow ((\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee A))$	MP with 81, 86
88	$(\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee A)$	MP with 83, 87
89	$(C \rightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee A)) \rightarrow (\neg((\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow \neg C)$	replace B by $(\neg P \vee \neg Q) \vee A$ in 17
90	$((\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee A)) \rightarrow (\neg((\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow \neg(\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A))$	replace C by $\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A$ in 89
91	$\neg((\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow \neg(\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A)$	MP with 88, 90
92	$(D \rightarrow \neg(\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A)) \rightarrow (((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee D) \rightarrow ((P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \vee \neg(\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A)))$	replace C by $\neg(\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A)$ in 25

109	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((((\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A))) \rightarrow D) \rightarrow (((\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A))) \rightarrow C))$	replace B by $((\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A))$ in 37
110	$(D \rightarrow (\neg(\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \vee (P \rightarrow (Q \rightarrow A)))) \rightarrow (((((\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A))) \rightarrow D) \rightarrow (((\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A))) \rightarrow (\neg(\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \vee (P \rightarrow (Q \rightarrow A))))$	replace C by $\neg(\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \vee (P \rightarrow (Q \rightarrow A))$ in 109
111	$((\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \vee (P \rightarrow (Q \rightarrow A))) \rightarrow (\neg(\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \vee (P \rightarrow (Q \rightarrow A))) \rightarrow (((((\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A))) \rightarrow (\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \vee (P \rightarrow (Q \rightarrow A)))) \rightarrow (((\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A))) \rightarrow (\neg(\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \vee (P \rightarrow (Q \rightarrow A))))$	replace D by $\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \vee (P \rightarrow (Q \rightarrow A))$ in 110
112	$((\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow (\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \vee (P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow (((\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A))) \rightarrow (\neg(\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \vee (P \rightarrow (Q \rightarrow A)))$	MP with 107, 111
113	$((\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow (\neg(\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \vee (P \rightarrow (Q \rightarrow A)))$	MP with 108, 112
114	$(\neg(\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \vee (P \rightarrow (Q \rightarrow A))) \rightarrow ((\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A)))$	replace C by $\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A$ in 61
115	$(D \rightarrow ((\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A)))) \rightarrow (((((\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A))) \rightarrow D) \rightarrow (((\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A))) \rightarrow ((\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A))))$	replace C by $(\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A))$ in 109
116	$((\neg(\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \vee (P \rightarrow (Q \rightarrow A))) \rightarrow ((\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A)))) \rightarrow (((((\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A))) \rightarrow (\neg(\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \vee (P \rightarrow (Q \rightarrow A)))) \rightarrow (((\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A))) \rightarrow ((\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A))))$	replace D by $\neg(\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \vee (P \rightarrow (Q \rightarrow A))$ in 115
117	$((\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow (\neg(\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \vee (P \rightarrow (Q \rightarrow A))) \rightarrow (((\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A))) \rightarrow ((\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A)))$	MP with 114, 116
118	$((\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A)))$	MP with 113, 117
119	$(\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee A) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A))$	MP with 67, 118
120	$(\neg(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow A) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A))$	reverse abbreviation impl in 119 at occurrence 1
121	$((P \wedge Q) \rightarrow A) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A))$	reverse abbreviation and in 120 at occurrence 1

□

Absorbtion of a conjunction (first direction):

Theorem 0.14 (hilb31).

$$(P \wedge P) \rightarrow P$$

Proof.

$$1 \quad (P \wedge Q) \rightarrow P$$

add sentence hilb24

$$2 \quad (P \wedge P) \rightarrow P$$

replace Q by P in 1

□

Absorption of a conjunction (second direction):

Theorem 0.15 (hilb32).

$$P \rightarrow (P \wedge P)$$

Proof.

1	$(P \vee P) \rightarrow P$	add sentence hilb11
2	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$	add sentence hilb7
3	$(P \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg P)$	replace Q by A in 2
4	$(B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$	replace P by B in 3
5	$(B \rightarrow P) \rightarrow (\neg P \rightarrow \neg B)$	replace A by P in 4
6	$((P \vee P) \rightarrow P) \rightarrow (\neg P \rightarrow \neg(P \vee P))$	replace B by $P \vee P$ in 5
7	$\neg P \rightarrow \neg(P \vee P)$	MP with 1, 6
8	$\neg Q \rightarrow \neg(Q \vee Q)$	replace P by Q in 7
9	$\neg\neg P \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg P)$	replace Q by $\neg P$ in 8
10	$P \rightarrow \neg\neg P$	add sentence hilb5
11	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$	add sentence defimpl1
12	$(\neg P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$	add sentence defimpl2
13	$(B \rightarrow \neg\neg P) \rightarrow (\neg\neg\neg P \rightarrow \neg B)$	replace A by $\neg\neg P$ in 4
14	$(P \rightarrow \neg\neg P) \rightarrow (\neg\neg\neg P \rightarrow \neg P)$	replace B by P in 13
15	$\neg\neg\neg P \rightarrow \neg P$	MP with 10, 14
16	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((A \vee P) \rightarrow (A \vee Q))$	add axiom axiom4
17	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((B \vee P) \rightarrow (B \vee Q))$	replace A by B in 16
18	$(P \rightarrow C) \rightarrow ((B \vee P) \rightarrow (B \vee C))$	replace Q by C in 17
19	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((B \vee D) \rightarrow (B \vee C))$	replace P by D in 18
20	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((\neg(\neg P \vee \neg P) \vee D) \rightarrow (\neg(\neg P \vee \neg P) \vee C))$	replace B by $\neg(\neg P \vee \neg P)$ in 19
21	$(D \rightarrow \neg P) \rightarrow ((\neg(\neg P \vee \neg P) \vee D) \rightarrow (\neg(\neg P \vee \neg P) \vee \neg P))$	replace C by $\neg P$ in 20
22	$(\neg\neg\neg P \rightarrow \neg P) \rightarrow ((\neg(\neg P \vee \neg P) \vee \neg\neg\neg P) \rightarrow (\neg(\neg P \vee \neg P) \vee \neg P))$	replace D by $\neg\neg\neg P$ in 21
23	$(\neg(\neg P \vee \neg P) \vee \neg\neg\neg P) \rightarrow (\neg(\neg P \vee \neg P) \vee \neg P)$	MP with 15, 22
24	$(P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P)$	add axiom axiom3
25	$(P \vee A) \rightarrow (A \vee P)$	replace Q by A in 24
26	$(B \vee A) \rightarrow (A \vee B)$	replace P by B in 25
27	$(B \vee \neg P) \rightarrow (\neg P \vee B)$	replace A by $\neg P$ in 26
28	$(\neg(\neg P \vee \neg P) \vee \neg P) \rightarrow (\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P))$	replace B by $\neg(\neg P \vee \neg P)$ in 27
29	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((A \rightarrow P) \rightarrow (A \rightarrow Q))$	add sentence hilb1
30	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((B \rightarrow P) \rightarrow (B \rightarrow Q))$	replace A by B in 29
31	$(P \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow P) \rightarrow (B \rightarrow C))$	replace Q by C in 30
32	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow C))$	replace P by D in 31
33	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((\neg(\neg P \vee \neg P) \vee \neg\neg\neg P) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg(\neg P \vee \neg P) \vee \neg\neg\neg P) \rightarrow C))$	replace B by $\neg(\neg P \vee \neg P) \vee \neg\neg\neg P$ in 32
34	$(D \rightarrow (\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P))) \rightarrow (((\neg(\neg P \vee \neg P) \vee \neg\neg\neg P) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg(\neg P \vee \neg P) \vee \neg\neg\neg P) \rightarrow (\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P))))$	replace C by $\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P)$ in 33
35	$((\neg(\neg P \vee \neg P) \vee \neg P) \rightarrow (\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P))) \rightarrow (((\neg(\neg P \vee \neg P) \vee \neg\neg\neg P) \rightarrow (\neg(\neg P \vee \neg P) \vee \neg P)) \rightarrow ((\neg(\neg P \vee \neg P) \vee \neg\neg\neg P) \rightarrow (\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P))))$	replace D by $\neg(\neg P \vee \neg P) \vee \neg P$ in 34

36	$((\neg(\neg P \vee \neg P) \vee \neg\neg\neg P) \rightarrow (\neg(\neg P \vee \neg P) \vee \neg P)) \rightarrow$	MP with 28, 35
	$((\neg(\neg P \vee \neg P) \vee \neg\neg\neg P) \rightarrow (\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P)))$	
37	$(\neg(\neg P \vee \neg P) \vee \neg\neg\neg P) \rightarrow (\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P))$	MP with 23, 36
38	$(B \vee \neg(\neg P \vee \neg P)) \rightarrow (\neg(\neg P \vee \neg P) \vee B)$	replace A by $\neg(\neg P \vee \neg P)$ in 26
39	$(\neg\neg\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P)) \rightarrow (\neg(\neg P \vee \neg P) \vee \neg\neg\neg P)$	replace B by $\neg\neg\neg P$ in 38
40	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((\neg\neg\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P)) \rightarrow D) \rightarrow$	replace B by $\neg\neg\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P)$
	$((\neg\neg\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P)) \rightarrow C))$	in 32
41	$(D \rightarrow (\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P))) \rightarrow (((\neg\neg\neg P \vee \neg(\neg P \vee$	replace C by $\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P)$ in
	$\neg P)) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg\neg\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P)) \rightarrow (\neg P \vee$	40
	$\neg(\neg P \vee \neg P)))$	
42	$((\neg(\neg P \vee \neg P) \vee \neg\neg\neg P) \rightarrow (\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P))) \rightarrow$	replace D by $\neg(\neg P \vee \neg P) \vee \neg\neg\neg P$
	$((((\neg\neg\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P)) \rightarrow (\neg(\neg P \vee \neg P) \vee \neg\neg\neg P)) \rightarrow$	in 41
	$((\neg\neg\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P)) \rightarrow (\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P))))$	
43	$((\neg\neg\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P)) \rightarrow (\neg(\neg P \vee \neg P) \vee \neg\neg\neg P)) \rightarrow$	MP with 37, 42
	$((\neg\neg\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P)) \rightarrow (\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P)))$	
44	$(\neg\neg\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P)) \rightarrow (\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P))$	MP with 39, 43
45	$(P \rightarrow A) \rightarrow (\neg P \vee A)$	replace Q by A in 11
46	$(B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \vee A)$	replace P by B in 45
47	$(B \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg P)) \rightarrow (\neg B \vee \neg(\neg P \vee \neg P))$	replace A by $\neg(\neg P \vee \neg P)$ in 46
48	$(\neg\neg P \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg P)) \rightarrow (\neg\neg\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P))$	replace B by $\neg\neg P$ in 47
49	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((\neg\neg P \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg P)) \rightarrow D) \rightarrow$	replace B by $\neg\neg P \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg P)$
	$((\neg\neg P \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg P)) \rightarrow C))$	in 32
50	$(D \rightarrow (\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P))) \rightarrow (((\neg\neg P \rightarrow \neg(\neg P \vee$	replace C by $\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P)$ in
	$\neg P)) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg\neg P \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg P)) \rightarrow (\neg P \vee$	49
	$\neg(\neg P \vee \neg P)))$	
51	$((\neg\neg\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P)) \rightarrow (\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P))) \rightarrow$	replace D by $\neg\neg\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P)$
	$((((\neg\neg P \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg P)) \rightarrow (\neg\neg\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P))) \rightarrow$	in 50
	$((\neg\neg P \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg P)) \rightarrow (\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P))))$	
52	$((\neg\neg P \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg P)) \rightarrow (\neg\neg\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P))) \rightarrow$	MP with 44, 51
	$((\neg\neg P \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg P)) \rightarrow (\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P)))$	
53	$(\neg\neg P \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg P)) \rightarrow (\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P))$	MP with 48, 52
54	$(\neg P \vee A) \rightarrow (P \rightarrow A)$	replace Q by A in 12
55	$(\neg B \vee A) \rightarrow (B \rightarrow A)$	replace P by B in 54
56	$(\neg B \vee \neg(\neg P \vee \neg P)) \rightarrow (B \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg P))$	replace A by $\neg(\neg P \vee \neg P)$ in 55
57	$(\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P)) \rightarrow (P \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg P))$	replace B by P in 56
58	$(D \rightarrow (P \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg P))) \rightarrow (((\neg\neg P \rightarrow \neg(\neg P \vee$	replace C by $P \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg P)$ in
	$\neg P)) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg\neg P \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg P)) \rightarrow (P \rightarrow$	49
	$\neg(\neg P \vee \neg P)))$	
59	$((\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P)) \rightarrow (P \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg P))) \rightarrow$	replace D by $\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P)$ in
	$((((\neg\neg P \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg P)) \rightarrow (\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P))) \rightarrow$	58
	$((\neg\neg P \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg P)) \rightarrow (P \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg P))))$	
60	$((\neg\neg P \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg P)) \rightarrow (\neg P \vee \neg(\neg P \vee \neg P))) \rightarrow$	MP with 57, 59
	$((\neg\neg P \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg P)) \rightarrow (P \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg P)))$	
61	$(\neg\neg P \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg P)) \rightarrow (P \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg P))$	MP with 53, 60
62	$P \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg P)$	MP with 9, 61
63	$P \rightarrow (P \wedge P)$	reverse abbreviation and in 62 at oc- currence 1

□

Absorbtion of identical preconditions (first direction):

Theorem 0.16 (hilb33).

$$(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow (P \rightarrow Q)$$

Proof.

1	$(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow A)$	add sentence hilb29
2	$(P \rightarrow (Q \rightarrow B)) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow B)$	replace A by B in 1
3	$(P \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow ((P \wedge C) \rightarrow B)$	replace Q by C in 2
4	$(D \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow ((D \wedge C) \rightarrow B)$	replace P by D in 3
5	$(D \rightarrow (C \rightarrow Q)) \rightarrow ((D \wedge C) \rightarrow Q)$	replace B by Q in 4
6	$(D \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow ((D \wedge P) \rightarrow Q)$	replace C by P in 5
7	$(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow ((P \wedge P) \rightarrow Q)$	replace D by P in 6
8	$P \rightarrow (P \wedge P)$	add sentence hilb32
9	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$	add sentence defimpl1
10	$(\neg P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$	add sentence defimpl2
11	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$	add sentence hilb7
12	$(P \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg P)$	replace Q by A in 11
13	$(B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$	replace P by B in 12
14	$(B \rightarrow (P \wedge P)) \rightarrow (\neg(P \wedge P) \rightarrow \neg B)$	replace A by $P \wedge P$ in 13
15	$(P \rightarrow (P \wedge P)) \rightarrow (\neg(P \wedge P) \rightarrow \neg P)$	replace B by P in 14
16	$\neg(P \wedge P) \rightarrow \neg P$	MP with 8, 15
17	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((A \vee P) \rightarrow (A \vee Q))$	add axiom axiom4
18	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((B \vee P) \rightarrow (B \vee Q))$	replace A by B in 17
19	$(P \rightarrow C) \rightarrow ((B \vee P) \rightarrow (B \vee C))$	replace Q by C in 18
20	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((B \vee D) \rightarrow (B \vee C))$	replace P by D in 19
21	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((Q \vee D) \rightarrow (Q \vee C))$	replace B by Q in 20
22	$(D \rightarrow \neg P) \rightarrow ((Q \vee D) \rightarrow (Q \vee \neg P))$	replace C by $\neg P$ in 21
23	$(\neg(P \wedge P) \rightarrow \neg P) \rightarrow ((Q \vee \neg(P \wedge P)) \rightarrow (Q \vee \neg P))$	replace D by $\neg(P \wedge P)$ in 22
24	$(Q \vee \neg(P \wedge P)) \rightarrow (Q \vee \neg P)$	MP with 16, 23
25	$(P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P)$	add axiom axiom3
26	$(P \vee A) \rightarrow (A \vee P)$	replace Q by A in 25
27	$(B \vee A) \rightarrow (A \vee B)$	replace P by B in 26
28	$(B \vee \neg P) \rightarrow (\neg P \vee B)$	replace A by $\neg P$ in 27
29	$(Q \vee \neg P) \rightarrow (\neg P \vee Q)$	replace B by Q in 28
30	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((A \rightarrow P) \rightarrow (A \rightarrow Q))$	add sentence hilb1
31	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((B \rightarrow P) \rightarrow (B \rightarrow Q))$	replace A by B in 30
32	$(P \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow P) \rightarrow (B \rightarrow C))$	replace Q by C in 31
33	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow C))$	replace P by D in 32
34	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((Q \vee \neg(P \wedge P)) \rightarrow D) \rightarrow ((Q \vee \neg(P \wedge P)) \rightarrow C))$	replace B by $Q \vee \neg(P \wedge P)$ in 33
35	$(D \rightarrow (\neg P \vee Q)) \rightarrow (((Q \vee \neg(P \wedge P)) \rightarrow D) \rightarrow ((Q \vee \neg(P \wedge P)) \rightarrow (\neg P \vee Q)))$	replace C by $\neg P \vee Q$ in 34
36	$((Q \vee \neg P) \rightarrow (\neg P \vee Q)) \rightarrow (((Q \vee \neg(P \wedge P)) \rightarrow (Q \vee \neg P)) \rightarrow ((Q \vee \neg(P \wedge P)) \rightarrow (\neg P \vee Q)))$	replace D by $Q \vee \neg P$ in 35
37	$((Q \vee \neg(P \wedge P)) \rightarrow (Q \vee \neg P)) \rightarrow ((Q \vee \neg(P \wedge P)) \rightarrow (\neg P \vee Q))$	MP with 29, 36
38	$(Q \vee \neg(P \wedge P)) \rightarrow (\neg P \vee Q)$	MP with 24, 37
39	$(B \vee Q) \rightarrow (Q \vee B)$	replace A by Q in 27
40	$(\neg(P \wedge P) \vee Q) \rightarrow (Q \vee \neg(P \wedge P))$	replace B by $\neg(P \wedge P)$ in 39
41	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((\neg(P \wedge P) \vee Q) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg(P \wedge P) \vee Q) \rightarrow C))$	replace B by $\neg(P \wedge P) \vee Q$ in 33
42	$(D \rightarrow (\neg P \vee Q)) \rightarrow (((\neg(P \wedge P) \vee Q) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg(P \wedge P) \vee Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)))$	replace C by $\neg P \vee Q$ in 41
43	$((Q \vee \neg(P \wedge P)) \rightarrow (\neg P \vee Q)) \rightarrow (((\neg(P \wedge P) \vee Q) \rightarrow (Q \vee \neg(P \wedge P))) \rightarrow ((\neg(P \wedge P) \vee Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)))$	replace D by $Q \vee \neg(P \wedge P)$ in 42

44	$((\neg(P \wedge P) \vee Q) \rightarrow (Q \vee \neg(P \wedge P))) \rightarrow ((\neg(P \wedge P) \vee Q) \rightarrow (\neg P \vee Q))$	MP with 38, 43
45	$(\neg(P \wedge P) \vee Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$	MP with 40, 44
46	$(P \rightarrow A) \rightarrow (\neg P \vee A)$	replace Q by A in 9
47	$(B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \vee A)$	replace P by B in 46
48	$(B \rightarrow Q) \rightarrow (\neg B \vee Q)$	replace A by Q in 47
49	$((P \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (\neg(P \wedge P) \vee Q)$	replace B by $P \wedge P$ in 48
50	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((P \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow D) \rightarrow (((P \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow C)$	replace B by $(P \wedge P) \rightarrow Q$ in 33
51	$(D \rightarrow (\neg P \vee Q)) \rightarrow (((P \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow D) \rightarrow (((P \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q))$	replace C by $\neg P \vee Q$ in 50
52	$((\neg(P \wedge P) \vee Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)) \rightarrow (((P \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (\neg(P \wedge P) \vee Q)) \rightarrow (((P \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q))$	replace D by $\neg(P \wedge P) \vee Q$ in 51
53	$((P \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (\neg(P \wedge P) \vee Q) \rightarrow (((P \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q))$	MP with 45, 52
54	$((P \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$	MP with 49, 53
55	$(\neg P \vee A) \rightarrow (P \rightarrow A)$	replace Q by A in 10
56	$(\neg B \vee A) \rightarrow (B \rightarrow A)$	replace P by B in 55
57	$(D \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow (((P \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow D) \rightarrow (((P \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow Q))$	replace C by $P \rightarrow Q$ in 50
58	$((\neg P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow (((P \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)) \rightarrow (((P \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow Q))$	replace D by $\neg P \vee Q$ in 57
59	$((P \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q) \rightarrow (((P \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow Q))$	MP with 10, 58
60	$((P \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$	MP with 54, 59
61	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((\neg(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \vee D) \rightarrow (\neg(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \vee C))$	replace B by $\neg(P \rightarrow (P \rightarrow Q))$ in 20
62	$(D \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow ((\neg(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \vee D) \rightarrow (\neg(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \vee (P \rightarrow Q)))$	replace C by $P \rightarrow Q$ in 61
63	$((P \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow ((\neg(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \vee ((P \wedge P) \rightarrow Q)) \rightarrow (\neg(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \vee (P \rightarrow Q)))$	replace D by $(P \wedge P) \rightarrow Q$ in 62
64	$(\neg(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \vee ((P \wedge P) \rightarrow Q)) \rightarrow (\neg(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \vee (P \rightarrow Q))$	MP with 60, 63
65	$(B \rightarrow ((P \wedge P) \rightarrow Q)) \rightarrow (\neg B \vee ((P \wedge P) \rightarrow Q))$	replace A by $(P \wedge P) \rightarrow Q$ in 47
66	$((P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow ((P \wedge P) \rightarrow Q)) \rightarrow (\neg(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \vee ((P \wedge P) \rightarrow Q))$	replace B by $P \rightarrow (P \rightarrow Q)$ in 65
67	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow ((P \wedge P) \rightarrow Q)) \rightarrow D) \rightarrow (((P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow ((P \wedge P) \rightarrow Q)) \rightarrow C)$	replace B by $(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow ((P \wedge P) \rightarrow Q)$ in 33
68	$(D \rightarrow (\neg(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \vee (P \rightarrow Q))) \rightarrow (((P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow ((P \wedge P) \rightarrow Q)) \rightarrow D) \rightarrow (((P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow ((P \wedge P) \rightarrow Q)) \rightarrow (\neg(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \vee (P \rightarrow Q)))$	replace C by $\neg(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \vee (P \rightarrow Q)$ in 67
69	$((\neg(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \vee ((P \wedge P) \rightarrow Q)) \rightarrow (\neg(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \vee (P \rightarrow Q))) \rightarrow (((P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow ((P \wedge P) \rightarrow Q)) \rightarrow (\neg(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \vee (P \rightarrow Q))) \rightarrow (((P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow ((P \wedge P) \rightarrow Q)) \rightarrow (\neg(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \vee (P \rightarrow Q)))$	replace D by $\neg(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \vee (P \rightarrow Q)$ in 68

70	$((P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow ((P \wedge P) \rightarrow Q)) \rightarrow (\neg(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \vee ((P \wedge P) \rightarrow Q)) \rightarrow (((P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow ((P \wedge P) \rightarrow Q)) \rightarrow (\neg(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \vee (P \rightarrow Q)))$	MP with 64, 69
71	$((P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow ((P \wedge P) \rightarrow Q)) \rightarrow (\neg(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \vee (P \rightarrow Q))$	MP with 66, 70
72	$(\neg B \vee (P \rightarrow Q)) \rightarrow (B \rightarrow (P \rightarrow Q))$	replace A by $P \rightarrow Q$ in 56
73	$(\neg(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \vee (P \rightarrow Q)) \rightarrow ((P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow (P \rightarrow Q))$	replace B by $P \rightarrow (P \rightarrow Q)$ in 72
74	$(D \rightarrow ((P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow (P \rightarrow Q))) \rightarrow (((P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow ((P \wedge P) \rightarrow Q)) \rightarrow D) \rightarrow (((P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow ((P \wedge P) \rightarrow Q)) \rightarrow ((P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow (P \rightarrow Q)))$	replace C by $(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow (P \rightarrow Q)$ in 67
75	$((\neg(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \vee (P \rightarrow Q)) \rightarrow ((P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow (P \rightarrow Q))) \rightarrow (((P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow ((P \wedge P) \rightarrow Q)) \rightarrow (\neg(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \vee (P \rightarrow Q))) \rightarrow (((P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow ((P \wedge P) \rightarrow Q)) \rightarrow ((P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow (P \rightarrow Q)))$	replace D by $\neg(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \vee (P \rightarrow Q)$ in 74
76	$((P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow ((P \wedge P) \rightarrow Q)) \rightarrow (\neg(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \vee (P \rightarrow Q)) \rightarrow (((P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow ((P \wedge P) \rightarrow Q)) \rightarrow ((P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow (P \rightarrow Q)))$	MP with 73, 75
77	$((P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow ((P \wedge P) \rightarrow Q)) \rightarrow ((P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow (P \rightarrow Q))$	MP with 71, 76
78	$(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow (P \rightarrow Q)$	MP with 7, 77

□

Absorption of identical preconditions (second direction):

Theorem 0.17 (hilb34).

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (P \rightarrow Q))$$

Proof.

1	$((P \wedge Q) \rightarrow A) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow A))$	add sentence hilb30
2	$((P \wedge Q) \rightarrow B) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow B))$	replace A by B in 1
3	$((P \wedge C) \rightarrow B) \rightarrow (P \rightarrow (C \rightarrow B))$	replace Q by C in 2
4	$((D \wedge C) \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow (C \rightarrow B))$	replace P by D in 3
5	$((D \wedge C) \rightarrow Q) \rightarrow (D \rightarrow (C \rightarrow Q))$	replace B by Q in 4
6	$((D \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (D \rightarrow (P \rightarrow Q))$	replace C by P in 5
7	$((P \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (P \rightarrow Q))$	replace D by P in 6
8	$(P \wedge P) \rightarrow P$	add sentence hilb31
9	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$	add sentence defimpl1
10	$(\neg P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$	add sentence defimpl2
11	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$	add sentence hilb7
12	$(P \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg P)$	replace Q by A in 11
13	$(B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$	replace P by B in 12
14	$(B \rightarrow P) \rightarrow (\neg P \rightarrow \neg B)$	replace A by P in 13
15	$((P \wedge P) \rightarrow P) \rightarrow (\neg P \rightarrow \neg(P \wedge P))$	replace B by $P \wedge P$ in 14
16	$\neg P \rightarrow \neg(P \wedge P)$	MP with 8, 15
17	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((A \vee P) \rightarrow (A \vee Q))$	add axiom axiom4
18	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((B \vee P) \rightarrow (B \vee Q))$	replace A by B in 17
19	$(P \rightarrow C) \rightarrow ((B \vee P) \rightarrow (B \vee C))$	replace Q by C in 18

20	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((B \vee D) \rightarrow (B \vee C))$	replace P by D in 19
21	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((Q \vee D) \rightarrow (Q \vee C))$	replace B by Q in 20
22	$(D \rightarrow \neg(P \wedge P)) \rightarrow ((Q \vee D) \rightarrow (Q \vee \neg(P \wedge P)))$	replace C by $\neg(P \wedge P)$ in 21
23	$(\neg P \rightarrow \neg(P \wedge P)) \rightarrow ((Q \vee \neg P) \rightarrow (Q \vee \neg(P \wedge P)))$	replace D by $\neg P$ in 22
24	$(Q \vee \neg P) \rightarrow (Q \vee \neg(P \wedge P))$	MP with 16, 23
25	$(P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P)$	add axiom axiom3
26	$(P \vee A) \rightarrow (A \vee P)$	replace Q by A in 25
27	$(B \vee A) \rightarrow (A \vee B)$	replace P by B in 26
28	$(B \vee \neg(P \wedge P)) \rightarrow (\neg(P \wedge P) \vee B)$	replace A by $\neg(P \wedge P)$ in 27
29	$(Q \vee \neg(P \wedge P)) \rightarrow (\neg(P \wedge P) \vee Q)$	replace B by Q in 28
30	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((A \rightarrow P) \rightarrow (A \rightarrow Q))$	add sentence hilb1
31	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((B \rightarrow P) \rightarrow (B \rightarrow Q))$	replace A by B in 30
32	$(P \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow P) \rightarrow (B \rightarrow C))$	replace Q by C in 31
33	$(D \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow C))$	replace P by D in 32
34	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((Q \vee \neg P) \rightarrow D) \rightarrow ((Q \vee \neg P) \rightarrow C))$	replace B by $Q \vee \neg P$ in 33
35	$(D \rightarrow (\neg(P \wedge P) \vee Q)) \rightarrow (((Q \vee \neg P) \rightarrow D) \rightarrow ((Q \vee \neg P) \rightarrow (\neg(P \wedge P) \vee Q)))$	replace C by $\neg(P \wedge P) \vee Q$ in 34
36	$((Q \vee \neg(P \wedge P)) \rightarrow (\neg(P \wedge P) \vee Q)) \rightarrow (((Q \vee \neg P) \rightarrow (Q \vee \neg(P \wedge P))) \rightarrow ((Q \vee \neg P) \rightarrow (\neg(P \wedge P) \vee Q)))$	replace D by $Q \vee \neg(P \wedge P)$ in 35
37	$((Q \vee \neg P) \rightarrow (Q \vee \neg(P \wedge P))) \rightarrow ((Q \vee \neg P) \rightarrow (\neg(P \wedge P) \vee Q))$	MP with 29, 36
38	$(Q \vee \neg P) \rightarrow (\neg(P \wedge P) \vee Q)$	MP with 24, 37
39	$(B \vee Q) \rightarrow (Q \vee B)$	replace A by Q in 27
40	$(\neg P \vee Q) \rightarrow (Q \vee \neg P)$	replace B by $\neg P$ in 39
41	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((\neg P \vee Q) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg P \vee Q) \rightarrow C))$	replace B by $\neg P \vee Q$ in 33
42	$(D \rightarrow (\neg(P \wedge P) \vee Q)) \rightarrow (((\neg P \vee Q) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg P \vee Q) \rightarrow (\neg(P \wedge P) \vee Q)))$	replace C by $\neg(P \wedge P) \vee Q$ in 41
43	$((Q \vee \neg P) \rightarrow (\neg(P \wedge P) \vee Q)) \rightarrow (((\neg P \vee Q) \rightarrow (Q \vee \neg P)) \rightarrow ((\neg P \vee Q) \rightarrow (\neg(P \wedge P) \vee Q)))$	replace D by $Q \vee \neg P$ in 42
44	$((\neg P \vee Q) \rightarrow (Q \vee \neg P)) \rightarrow ((\neg P \vee Q) \rightarrow (\neg(P \wedge P) \vee Q))$	MP with 38, 43
45	$(\neg P \vee Q) \rightarrow (\neg(P \wedge P) \vee Q)$	MP with 40, 44
46	$(P \rightarrow A) \rightarrow (\neg P \vee A)$	replace Q by A in 9
47	$(B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \vee A)$	replace P by B in 46
48	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((P \rightarrow Q) \rightarrow D) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow C))$	replace B by $P \rightarrow Q$ in 33
49	$(D \rightarrow (\neg(P \wedge P) \vee Q)) \rightarrow (((P \rightarrow Q) \rightarrow D) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg(P \wedge P) \vee Q)))$	replace C by $\neg(P \wedge P) \vee Q$ in 48
50	$((\neg P \vee Q) \rightarrow (\neg(P \wedge P) \vee Q)) \rightarrow (((P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg(P \wedge P) \vee Q)))$	replace D by $\neg P \vee Q$ in 49
51	$((P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg(P \wedge P) \vee Q))$	MP with 45, 50
52	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg(P \wedge P) \vee Q)$	MP with 9, 51
53	$(\neg P \vee A) \rightarrow (P \rightarrow A)$	replace Q by A in 10
54	$(\neg B \vee A) \rightarrow (B \rightarrow A)$	replace P by B in 53
55	$(\neg B \vee Q) \rightarrow (B \rightarrow Q)$	replace A by Q in 54
56	$(\neg(P \wedge P) \vee Q) \rightarrow ((P \wedge P) \rightarrow Q)$	replace B by $P \wedge P$ in 55
57	$(D \rightarrow ((P \wedge P) \rightarrow Q)) \rightarrow (((P \rightarrow Q) \rightarrow D) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \wedge P) \rightarrow Q)))$	replace C by $(P \wedge P) \rightarrow Q$ in 48
58	$((\neg(P \wedge P) \vee Q) \rightarrow ((P \wedge P) \rightarrow Q)) \rightarrow (((P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg(P \wedge P) \vee Q)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \wedge P) \rightarrow Q)))$	replace D by $\neg(P \wedge P) \vee Q$ in 57
59	$((P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg(P \wedge P) \vee Q)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \wedge P) \rightarrow Q))$	MP with 56, 58

80	$((\neg((P \wedge P) \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (P \rightarrow Q))) \rightarrow ((P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \vee \neg((P \wedge P) \rightarrow Q))) \rightarrow ((\neg((P \wedge P) \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (P \rightarrow Q))) \rightarrow (\neg(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (P \rightarrow Q))))$	MP with 74, 79
81	$(\neg((P \wedge P) \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (P \rightarrow Q))) \rightarrow (\neg(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (P \rightarrow Q)))$	MP with 76, 80
82	$(B \rightarrow (P \rightarrow (P \rightarrow Q))) \rightarrow (\neg B \vee (P \rightarrow (P \rightarrow Q)))$	replace A by $P \rightarrow (P \rightarrow Q)$ in 47
83	$((\neg((P \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (P \rightarrow Q))) \rightarrow (\neg((P \wedge P) \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (P \rightarrow Q))))$	replace B by $(P \wedge P) \rightarrow Q$ in 82
84	$(D \rightarrow C) \rightarrow (((\neg((P \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (P \rightarrow Q))) \rightarrow D) \rightarrow (((\neg((P \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (P \rightarrow Q))) \rightarrow C))$	replace B by $(\neg((P \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (P \rightarrow Q)))$ in 33
85	$(D \rightarrow (\neg(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (P \rightarrow Q)))) \rightarrow (((\neg((P \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (P \rightarrow Q))) \rightarrow D) \rightarrow (((\neg((P \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (P \rightarrow Q))) \rightarrow (\neg(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (P \rightarrow Q))))$	replace C by $\neg(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (P \rightarrow Q))$ in 84
86	$((\neg((P \wedge P) \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (P \rightarrow Q))) \rightarrow (\neg(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (P \rightarrow Q)))) \rightarrow (((\neg((P \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (P \rightarrow Q))) \rightarrow (\neg(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (P \rightarrow Q)))) \rightarrow (\neg((P \wedge P) \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (P \rightarrow Q))))$	replace D by $\neg((P \wedge P) \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (P \rightarrow Q))$ in 85
87	$((\neg((P \wedge P) \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (P \rightarrow Q))) \rightarrow (\neg(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (P \rightarrow Q)))) \rightarrow (((\neg((P \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (P \rightarrow Q))) \rightarrow (\neg(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (P \rightarrow Q)))) \rightarrow (\neg((P \wedge P) \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (P \rightarrow Q))))$	MP with 81, 86
88	$((\neg((P \wedge P) \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (P \rightarrow Q))) \rightarrow (\neg(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (P \rightarrow Q)))) \rightarrow (\neg(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (P \rightarrow Q)))$	MP with 83, 87
89	$(\neg B \vee (P \rightarrow (P \rightarrow Q))) \rightarrow (B \rightarrow (P \rightarrow (P \rightarrow Q)))$	replace A by $P \rightarrow (P \rightarrow Q)$ in 54
90	$(\neg(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (P \rightarrow Q))) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (P \rightarrow Q)))$	replace B by $P \rightarrow Q$ in 89
91	$(D \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (P \rightarrow Q)))) \rightarrow (((\neg((P \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (P \rightarrow Q))) \rightarrow D) \rightarrow (((\neg((P \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (P \rightarrow Q))) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (P \rightarrow Q))))$	replace C by $(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (P \rightarrow Q))$ in 84
92	$((\neg(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (P \rightarrow Q))) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (P \rightarrow Q)))) \rightarrow (((\neg((P \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (P \rightarrow Q))) \rightarrow (\neg(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (P \rightarrow Q)))) \rightarrow (((\neg((P \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (P \rightarrow Q))) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (P \rightarrow Q))))$	replace D by $\neg(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (P \rightarrow Q))$ in 91
93	$((\neg((P \wedge P) \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (P \rightarrow Q))) \rightarrow (\neg(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (P \rightarrow Q)))) \rightarrow (((\neg((P \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (P \rightarrow Q))) \rightarrow (\neg(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (P \rightarrow Q)))) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (P \rightarrow Q)))$	MP with 90, 92
94	$((\neg((P \wedge P) \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (P \rightarrow Q))) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (P \rightarrow Q))))$	MP with 88, 93
95	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (P \rightarrow Q))$	MP with 7, 94

□

1 Cross Reference

This module is used by the following modules:

Name: `prophilbert3`

Version: 1.00.00
Rule version: 1.00.00
Origin: [prophilbert3_1.00.00_1.00.00.qedeq](#)
pdf: [prophilbert3_1.00.00_1.00.00.pdf](#)